PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. 1. Januar 1911. Redaktionsschluß für No. 2 am 7. Januar 1911. 12. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:
J. Koenigsberger, Über die Bestimmung der Zahl schwingender Teile in Dämpfen, Lösungen, leuchtenden Gasen. S. 1.
R. Ladenburg, Über das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen des leuchtenden Wasserstoffs. S. 5.
R. Ladenburg, Astrophysikalische Bemerkungen im Anschluß an Versuche über Absorption und anomale Dispersion in leuchtendem Wasserstoff. S. 9.
P. P. Koch, Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen. S. 12.
F. Dessauer, Versuche mit Funkeninduktoren und Röntgenröhren. S. 14.
Vorträge und Reden:
F. Klein, Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. S. 17.
Zusammenfassende Berichte:
H. Konen, Vierte Konferenz der „International Union for Cooperation in Solar Research". S. 27.
Physikalische Technik:
W. Kaufmann, Ein einfacher Vorlesungsapparat. S. 29.
B. Glatzel, Demonstrationsversuch über die Energieaufnahme in Wechselstromkreisen. S. 30.
W. Volkmann, Die Leistungsgrenze der Spiegelablesung. S. 30.
W. B. v. Czudnochowski, Über einige neuere physikalische Projektions-Demonstrationen. S. 32.
Mitteilung über Maßeinheiten:
Internationaler Wert der EMK. des Weston-Normalelements. S. 39.
Besprechungen:
R. Hennig, Die älteste Entwicklung der Telegraphie und Telephonie. S. 39.
H. Brick, Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. S. 39.
H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. III. S. 39.
Tagesereignisse. S. 40.
Personalien. S. 40.
Gesuche. S. 40.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Bestimmung der Zahl schwingender Teile in Dämpfen, Lösungen, leuchtenden Gasen[1]).

Von Joh. Koenigsberger.

Die Dispersion und Absorption der elektromagnetischen Strahlung in einer Substanz bestimmt nach der Ketteler-Helmholtzschen Dispersionstheorie und den Formeln von Lorentz, Drude und Planck die Zahl der schwingenden und auch, wie wir annehmen müssen, der leuchtenden Teile. Die Messung der Absorption ist nach den im folgenden beschriebenen Methoden auch in Lichtquellen viel leichter als die der Dispersion, und braucht nur für zwei Wellenlängen, von denen eine willkürlich ist, zu erfolgen. Die Formeln für die Berechnung der Größe $p\,\frac{e}{m}$ aus der Absorption[2]) gestalten sich besonders einfach, wenn die maximalen Absorptionsindizes klein ($< 0{,}01$), und wenn die Linien oder die Gebiete der selektiven Absorption schmal sind. Letzteres trifft zu, wenn die zwei Wellenlängen, für welche der Absorptionsindex den halben Wert des maximalen besitzt, um weniger als $30\,\mu\mu$ verschieden sind. Ersteres trifft wohl meist von selbst zu, sowie schmale Absorptionsgebiete[3]) vorliegen. Soweit wir bisher unsere angenäherten Berechnungen ausgedehnt haben, mochten es feste, flüssige oder gasförmige Körper sein, die Absorptionsindizes und damit die Zahl der Moleküle, die schärfere Absorptionsgebiete geben, ist klein ($< 1 \cdot 10^{-4}$ der Gesamtzahl bei Atmosphärendruck) verglichen mit der bei kontinuierlicher selektiver Absorption. Bestimmte chemische Gleichgewichte, in denen eine Komponente in geringer Menge vorkommt, scheinen in festen, flüssigen Körpern und zum Teil in Dämpfen die Art Absorption, die wir kurzweg Absorptionsstreifen[1]) nennen wollen, zu bedingen. Da sich aus der Messung direkt der Wert des Absorptionsindex ergibt, kann man stets beurteilen, wann die im folgenden entwickelten einfachen Formeln, die für $\varkappa' < 0{,}01$ gelten, zur Berechnung von $p\,\frac{e}{m}$ anwendbar sind.

Es ist (vgl. loc. cit.):

$$(2\,\varkappa'_m{}^2 + 1)^2 - 1 = \frac{g^2 \cdot \lambda_m{}^2}{g^2} = \frac{1}{\beta_m{}^2}$$

und dies wird für[2])

$$\varkappa'_m < 1 \cdot 10^{-2} \text{ ist } 2\,\varkappa'_m = \frac{g \cdot \lambda'_m}{g'} = \frac{1}{\beta'_m} \qquad (1)$$

Wenn dies $\varkappa'_m$ für das bekannte λ'_m gemessen ist, kann von den beiden Größen α

1) Den Spektrograph, mit dem die Beobachtungen angestellt wurden, verdanken wir der Bewilligung des Board of trustees des Elizabeth-Thompson Science Fund in Boston.

2) K. Kilchling u. J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. **32**, 843, 1910; $n\varkappa$ (in der Bezeichnung v. Voigt u. Drude) $= \varkappa'$.

3) Beispiele sind: alle Emissions- bezw. Absorptionslinien-, -banden und -streifen in Gasen und Dämpfen, die Absorptionsstreifen in den Didymverbindungen, Kaliumpermanganat, in Blutfarbstoffen usw.

1) Wir unterscheiden in Anlehnung an die üblichen Bezeichnungen: 1. Absorptionslinien (Beispiel D-Linien im Natriumdampf), 2. Absorptionsbanden (in Linien auflösbar z. B. in Brom), 3. selektive Eigenabsorption (Beispiel: Anilinfarbstoffe), 4. Absorptionsstreifen (Beispiel: Didymverbindungen).

2) Da es für viele Zwecke genügt, g und g' und die

und β, die in die weitere Rechnung eingehen, der Wert von β für jede Wellenlänge λ stets angegeben werden; denn es ist $\beta = \frac{g'}{g\lambda}$ und $\frac{g'}{g}$ ergibt sich aus I. λ'_m muß also für den Absorptionsstreifen bekannt sein. Im allgemeinen kann wie loc. cit. auseinandergesetzt, λ'_m von der Wellenlänge maximaler Absorption verschieden sein, und dann ist die Rechnung wesentlich schwieriger und die Beobachtungen müssen vollständiger sein. Wenn aber wie hier $\varkappa'_m$ klein, so ist β'_m stets groß (> 100). Es ist (vgl. loc. cit.) $\lambda'_m = \frac{\lambda_m}{\sqrt{1-g}}$ gesetzt worden, wobei λ_m die Wellenlänge der ungedämpften Eigenschwingung ist. Da für Absorptionsindizes ($< 0{,}01$) wie aus dem Folgenden hervorgeht, auch notwendig g und somit erst recht g_0 klein ist ($< 0{,}001$), so sind schon jedenfalls λ_m und λ'_m sehr nahe (auf weniger als 0,0002 ihres Wertes) gleich. Noch viel näher rückt aber λ'_m an das Maximum der Absorption λ_k, das bei stärkerer Dämpfung von λ_m noch merklich verschieden ist; denn es gilt (wie loc. cit. gezeigt) die Reihenfolge $\lambda_m < \lambda_k < \lambda'_m$. Die Unterschiede werden um so kleiner, je schwächer die Dämpfungen, so daß für Spektrallinien die Unterschiede zwischen λ_k und $\lambda'_m < 0{,}001$ Å. sind. Man braucht also erstens nur die maximale Absorption zu messen und deren Wellenlänge genau festzustellen. Da β groß ist, so kann man in dem von M. Planck gegebenen Ausdruck

$$\varkappa'^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha)^2+\beta^2}-(\alpha^2+\beta^2-\alpha)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

α gegen β^2 und α^2 vernachlässigen[1]) und erhält dann

$$\varkappa' = \frac{\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}. \qquad \text{(II)}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\alpha = +\sqrt{\frac{\beta}{2\varkappa'} - \beta^2}.$$

Da aber β, wie vorher erwähnt, aus der Messung von $\varkappa'$ für maximale Absorption für jedes λ zu berechnen ist, genügt es, für dies beliebige λ noch $\varkappa'$ experimentell zu bestimmen.

Dann ist

$$g = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\lambda'_m}{\lambda}\right)^2 - 1\right] \qquad \text{(III)}$$

und

$$p\,\frac{e}{m} = \frac{\pi}{9660}\,\frac{M}{d}\cdot\frac{g}{\lambda'^2_m}, \qquad \text{(a)}$$

wobei $\lambda'_m = \lambda_k$ ist.

Also muß noch das Molekulargewicht des betreffenden Dampfes und die Dichte auf $H_2O = 1$ bezogen bekannt sein.

1. Aus der Regel von Avogadro (p' in Atm. gemessen) folgt aus (a)

$$p\,\frac{e}{m} = \frac{g}{\lambda_m^{12}}\cdot\frac{T}{p'}\cdot 0{,}000889 \qquad \text{(b)}$$

pro Molekül des Dampfes.

2. In vielen Fällen ist es leichter, die Dichte des Dampfes oder Konzentration der Lösung gesondert zu bestimmen. Dann braucht man im Grunde nur das chemische Molekül und nicht das Molekulargewicht zu kennen; denn aus der Formel ergibt sich z. B., daß wenn n Elektronen auf das einfache Molekül schwingen, auf das Doppelmolekül $2n$ schwingen usw. Man hat dann $p\,\frac{e}{m}$ pro Molekül der chemischen Formel.

3. In leuchtenden Gasen, in denen man die in Betracht kommende Dichte nicht immer leicht angeben kann, ist es vor allem wichtig, $p\,\frac{e}{m}$ pro ccm zu kennen; dann lautet die Formel:

$$N = \frac{g}{\lambda_m^{12}}\,6{,}40\cdot 10^9. \qquad \text{(c)}$$

Wenn $\varkappa'$ nicht für 1 cm Schichtdicke, sondern für beliebige Dicke bestimmt ist, so gilt auch N hierfür.

$p\,\frac{e}{m}$ kann man also leicht aus der Absorption ermitteln, aber man muß, um die Zahl der eine bestimmte Absorption oder Emission verursachenden Teile zu ermitteln, $\frac{e}{m}$ kennen. Hierüber geben uns vor allem die magnetooptischen Beobachtungen Aufschluß. Wir wissen aus dem Studium des Zeeman-Phänomens, daß die Serienlinien der Emissionsspektra ein $\frac{e}{m}$ entsprechend den Werten für das negative Elektron besitzen oder ein kleinzahliges Vielfaches eines kleinzahligen aliquoten Teils desselben (Regel von Runge) aufweisen.

Durch die Untersuchungen von J. Becquerel[1]) sowie von H. du Bois[2]) und G. J. Elias an den Absorptionsstreifen fester Körper im sichtbaren Gebiet an festen Körpern ist festgestellt, daß $\frac{e}{m}$ die Größenordnung des Wertes für negative Elektronen besitzt. Du Bois und Elias, welche eine große Zahl der verschiedenartigsten Substanzen untersuchten, haben meist eine Ver-

Zahl der schwingenden Teile auf 5—10 Proz. genau zu kennen, sind die obigen Formeln noch anwendbar, wenn $\varkappa'_m$ größer als 0,01, aber kleiner als 0,1 ist.

1) Man kann im allgemeinen nachher aus dem Wert für α ersehen, ob diese Vernachlässigung berechtigt war. In allen von uns berechneten Fällen traf das zu.

1) J. Becquerel, diese Zeitschr. **9**, 94, 1908 und **8**, 632 u. 929, 1907.

2) H. du Bois u. G. J. Elias, Ann. d. Phys. **27**, 233, 1908.

schiebung der Absorptionsstreifen durch das Magnetfeld einem negativen Elementarquantum entsprechend gefunden. Nur einzelne Streifen zeigen eine Verschiebung, die entweder durch ein starkes inneres Feld, den paramagnetischen Eigenschaften der Substanzen entsprechend, oder durch ein positives Elektron verursacht ist. Doch ist auch dann die absolute Größe von $\frac{e}{m}$ für Absorptionsstreifen im ultravioletten und sichtbaren Gebiet von derselben Größenordnung wie für das negative Elektron. Wenn wir das beachten, folgt, daß p für Absorptionsstreifen fester und flüssiger Körper eine sehr kleine Größe ist und daß auf weniger als 10000 Moleküle eine derartig scharfe Absorption bewirkende Molekülkombination kommt. Das gilt nicht nur für die Absorptionsstreifen in Kristallen der seltenen Erden, sondern auch in Kaliumpermanganat, in vielen Chromverbindungen. Man kann überhaupt sagen, daß alle paramagnetischen Verbindungen ihre Farben im sichtbaren Gebiet Schwingungskomplexen verdanken, die nur in sehr geringer Zahl vorhanden sind. $p\frac{e}{m}$ ist für alle diese Substanzen, wie sich aus Messung der Absorption ergibt, sehr klein, von der Größenordnung 10^2 und weniger. Wenn man annimmt, daß $\frac{e}{m}$ da von der Größenordnung des negativen Elektrons ist, so ergibt sich ein sehr kleiner Wert ($< \cdot 10^{-3}$) von p. Auch für die ultravioletten Absorptionsstreifen der organischen Substanzen in Lösungen und als Dampf, sowie für die Phosphoreszenzbanden scheint bisweilen dasselbe zu gelten; die Zahl der im Absorptionsstreifen schwingenden Teile ist in einzelnen Fällen jedenfalls weniger als 0,001 der gelösten Teile. Doch ist das von uns gesammelte Material zu gering, um Schlüsse daraus ziehen zu können.

In vielen Fällen ist die direkte Beobachtung des Zeeman-Phänomens schwierig; doch läßt sich dann aus der magnetischen Drehung der Polarisationsebene der Wert von $\frac{e}{m}$ nach dem Vorgang von J. J. Hallo, Geest, J. Becquerel bestimmen. Die Formeln für scharfe Absorptionsstreifen und für Absorptionslinien sind von W. Voigt[1]) entwickelt. Für die breiteren Absorptionsstreifen in festen und flüssigen Körpern, deren Maximum weniger scharf ist, sind die Drehungen, die von diesen Streifen herrühren, entsprechend der geringeren Zahl schwingender Systeme allerdings sehr schwach und unsicher zu messen.

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. Leipzig 1908, S. 125 ff.

Wenn in festen, flüssigen oder gasförmigen Körpern ein ausgedehntes Gebiet selektiver Eigenabsorption vorliegt, erübrigt sich eine besondere Messung von $\frac{e}{m}$, weil dann der Wert von $p\frac{e}{m}$, ein kleinzahliges Vielfache oder kleinzahliger Teil (1 ... 6) von $\frac{e}{m}$ ist, und das $\frac{e}{m}$ von Ionen mindestens 1000mal kleiner ist. Ein Zweifel ist da kaum möglich.

Eine genaue Bestimmung von $\frac{e}{m}$ aus magnetooptischen Erscheinungen ist, wie a. a. O.[1]) dargelegt, unnötig; denn sie ist nur der Größenordnung nach, nicht aber exakt für $p\frac{e}{m}$ der Dispersionstheorien verwertbar. $\frac{e}{m}$ der Dispersionstheorie wird für Temperaturen über 0° abs. kleiner als $\frac{e}{m}$ für langsame Kathodenstrahlen und nähert sich vielleicht dem Wert $^1/_3\frac{e}{m}$ für sehr hohe Temperaturen.

Hier sei nur ein Beispiel einer Berechnung von $p\frac{e}{m}$ nach den vorhergehenden Formeln und nach gemeinsamen Beobachtungen von Hrn. K. Küpferer und dem Verf. gegeben. Indigodampf ($C_{16}H_{10}O_2N_2$) hat sein Absorptionsmaximum bei $\lambda = 546\ \mu\mu$; $\varkappa'$ ist dort gemessen $= 1{,}76 \cdot 10^{-6}$ für $\lambda = 592$ ist $\varkappa' = 0{,}129 \cdot 10^{-6}$, daraus berechnet sich $g = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$; für $\lambda = 563$ berechnet sich $g = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$; für $\lambda = 554$ $g = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$; im Mittel aus Messungen bei vielen Wellenlängen $g = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$. Die Dichte wurde mit der Mikrowage zu 0,000001 52 (± 1 Proz.) festgestellt; das Molekulargewicht ist 262. Daraus ergibt sich nach Formel (a) $p\frac{e}{m} = 0{,}29 \cdot 10^7$ bei 300°.

Für Indigoblau als fester Körper, dessen Absorptionsmaximum verglichen mit dem des Dampfes nach Gelb verschoben ist, ergab sich nach noch nicht publizierten Messungen von Herrn Küpferer $p\frac{e}{m} = 0{,}28 \cdot 10^7$ bei 100°, eine auffallende Übereinstimmung. Daraus geht wohl auch hervor, daß das Gesetz von Beer, solange man es auf die kontinuierliche selektive Eigenabsorption bezieht, in den weitesten Grenzen gültig ist. Wenn es nicht gilt, wie in einigen von E. v. Bahr untersuchten Fällen, so dürfte das darauf hinweisen, daß die betr. Absorptionsbanden nicht durch das Molekül der chemischen Verbindung bedingt sind (so z. B.

1) Ann. d. Phys. **32**, 845, 1910.

einige Kohlensäureabsorptionsbanden im Ultrarot). Dagegen sind die Dämpfungskonstanten der Schwingung verschieden, g' im festen Zustand $= 2{,}0 \cdot 10^{-5}$, im Dampf $0{,}24 \cdot 10^{-5}$. Die Dämpfung kann aber danach nicht durch Molekülstöße bedingt sein, sie müßte sonst mehr als 1000mal kleiner sein als im festen Zustand — sie ist auf innermolekulare kinetische Vorgänge zurückzuführen. Es ist nun wahrscheinlich, daß der gasförmige Zustand doch eine geringe Lockerung des innermolekularen Verbandes herbeiführt und damit die Dämpfung etwas schwächt. Die quasielastische Kraft dagegen, die das Elektron an den positiven Kern bindet, ist im Indigodampf schwächer, in andern Dämpfen stärker als im festen Zustand. Daß $\frac{e}{m}$ einem negativen Elektron entspricht, ist wohl unzweifelhaft. Ob dagegen $p = {}^1/_6$ oder ${}^1/_4$ oder gar 1 gesetzt werden muß, kann, wie anderwärts dargelegt, nur durch weitere Annahmen und größeres Material, nicht durch magnetooptische Messungen entschieden werden.

Wie gering andererseits die Elektronenzahl in den schärferen Absorptionsstreifen ist, zeigt u. a. folgende von Herrn N. Burger mit Gittterspektrograph angestellte Messung an dem mittleren Absorptionsstreifen im Grün von einer Kaliumpermanganatlösung[1]) (Konzentration $= 0{,}000166$) bei 16^0. Für $\lambda_m = 524{,}5\ \mu\mu$ ist $\varkappa'_m = 1{,}59 \cdot 10^{-5}$[2]); für $\lambda = 521{,}0\ \mu\mu$, $\varkappa' = 1{,}00 \cdot 10^{-5}$, für $\lambda = 528$; $\varkappa' = 0{,}95 \cdot 10^{-5}$. Aus den ersten beiden Zahlen ergibt sich $g = 6{,}65 \cdot 10^{-7}$; aus der ersten und letzten $g = 6{,}73 \cdot 10^{-7}$ aus den anderen Zahlen (vgl. Kurve) ebenfalls Werte für g zwischen 6 und $7 \cdot 10^{-7}$, woraus $p\,\frac{e}{m} = 7{,}4 \cdot 10^3$; also kommt auf etwa 500 Moleküle Kaliumpermanganat (bei dieser Konzentration) ein diese Absorption bewirkendes Elektron. Daß ein Elektron und kein Ion in Betracht kommt, wird durch die Untersuchungen von Du Bois und Elias (loc. cit.) wahrscheinlich gemacht, und ist hier außerdem dadurch gefordert, daß der Wert von $7{,}4 \cdot 10^3$ für ein in $KMnO_4$ enthaltenes Ion (geladenes Atom) viel zu groß ist; man müßte sonst annehmen, daß 20 Sauerstoffatome zusammen als ein System mit einer freien negativen Ladung (Quantum) schwingen, das ist aber ausgeschlossen. Hier spielen vermutlich chemische Vorgänge mit, von denen wir noch nichts wissen und über die man Hypothesen erst aufstellen könnte, wenn ein größeres Material vorläge.

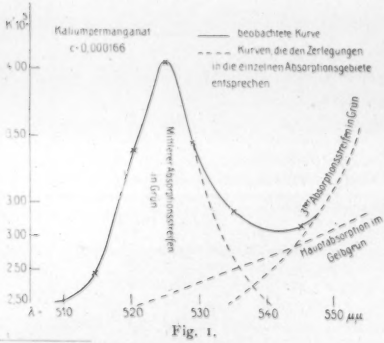


Fig. 1.

1) Die Absorptionsstreifen des Kaliumpermanganats im Grün gehören zu den intensivsten Streifen, die es gibt; sie bedingen die grüne metallische Oberflächenfarbe der Kristalle. Die meisten andern Absorptionsstreifen, z. B. in Didymverbindungen, in Chromverbindung etc., sind viel schwächer und daher ohne Wirkung auf das Reflexionsvermögen im festen Zustand, sie entsprechen einer viel geringeren Elektronenzahl.

2) Hierbei ist die sich darüberlagernde gleichmäßige Absorption im Grün abgezogen.

Um in Lichtquellen spez. Flammen die Absorption leicht zu bestimmen, wurde folgendes Verfahren eingeschlagen. Hinter der Lichtquelle Fl wird ein Platinspiegel Sp angebracht. Dieser Spiegel wird mit einer Linse L auf den

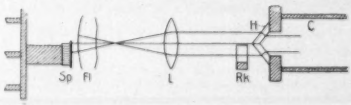


Fig. 2.

Spalt des Kollimators C eines Spektralapparates projiziert. Auf diesem Spalt ist eine Doppelplatte H nach Helmholtz angebracht, vor deren einer Hälfte ein geeichter Rauchglaskeil Rk verschoben wird. Dann hat man im Spektralapparat zwei ohne Trennungslinie aneinanderstoßende Felder, von denen das eine nur direktes Licht von der Flamme oder dem Geißlerschen Rohr, das andere direktes, sowie gespiegeltes und durch die Flamme hindurchgegangenes Licht erhält. Da das Reflexionsvermögen dieses Platinspiegels früher vom Verf. genau bestimmt worden war — es ist nur ganz wenig höher als das von E. Hagen und H. Rubens für einen Platinspiegel gemessene Reflexionsvermögen —, so läßt sich leicht exakt die Menge des absorbierten Lichtes messen[1]). Die Anordnung ist auch eine bequeme Demonstrationsmethode der Absorption einer Natriumflamme. Je nach der Lage der Natriumkar-

1) Die Inkonstanz von $\frac{E\lambda}{A\lambda}$, die R. Ladenburg (Verh. d. Dtsch. phys. Ges. **12**, 553, 1910) an Spektrallinien des Wasserstoffs fand, scheint uns auf Inhomogenität, sei es gröberer, sei es feinerer Art, zurückführbar. In einem ionisierten, im elektrischen Felde befindlichen Gas sind Teile mit sehr verschiedener Geschwindigkeit und Temperatur möglich.

bonatperle in der Flamme erscheint der Spiegel durch die Flamme gesehen viel heller oder fast gerade so hell wie die Flamme ohne Spiegel dahinter. Um die oben angegebene Rechnung von $p\frac{e}{m}$ durchzuführen, muß $\varkappa'$ im Maximum und an einer Stelle außerhalb des Maximums gemessen werden. Hierzu ist sehr starke Dispersion (Rowland-Gitter in der dritten Ordnung) und ziemlich breite Linien, wie sie in Flammen oder elektrischem Lichtbogen in Luft oder Wasserstoffröhre auftreten, erforderlich. Dagegen lassen sich an sehr homogenen Linien, z. B. Quecksilberlinien der Aronsschen Quecksilberlampe, derartige Messungen an zwei Stellen kaum ausführen.

Einige breitere Fraunhofersche Linien auf der Sonne gestatten eine angenäherte Berechnung der Zahl N der betr. absorbierenden Teile in der Sonnenatmosphäre, die nach einer vorläufigen Schätzung erstaunlich gering ausfiel. Allerdings ist hierzu notwendig anzunehmen, daß die Sonne aus einem nur emittierenden Kern und einem nur selektiv absorbierenden Mantel besteht, was jedenfalls nicht streng richtig ist. Die quantitativen bolometrischen Messungen von P. Langley konnte ich vorläufig nicht verwerten, da ich nicht übersehen kann, inwieweit namentlich in den Maxima der Verlauf der Kurven durch die Dispersion des Apparats oder durch die Absorption bedingt ist.

In Ergänzung zu einer früheren Mitteilung[1]) sei folgendes bemerkt. Weitere Versuche haben unsere Annahme bestätigt, daß die kontinuierliche selektive Eigenabsorption über einen größeren Spektralbereich dem normalen Verhalten der Dämpfe und Gase bei gewöhnlicher Temperatur entspricht. Die scharfen Absorptionsstreifen (oder kontinuierlichen Banden) sind wohl auf Elektronen von Molekülen anderer Art zurückzuführen, die in geringer Zahl vorhanden, vielleicht durch ein chemisches Gleichgewicht bedingt sind. Die in Linien auflösbaren Banden scheinen mit chemischer Dissoziation verbunden, wie wir das schon hypothetisch geäußert haben; jedoch bedingt die chemische Dissoziation keineswegs immer ein Bandenspektrum im sichtbaren Gebiet. Ein quantitativer Zusammenhang zwischen chemischer Dissoziation und Intensität des Bandenspektrums, den wir vermuteten, hat sich dagegen nicht auffinden lassen, schon deshalb, weil wir für die letztere bis jetzt kein einheitliches Maß aufstellen konnten.

1) J. Koenigsberger u. K. Küpferer, diese Zeitschr. 11, 568, 1910.

Freiburg i. B., Mathem.-physik. Institut.

(Eingegangen 14. Dezember 1910.)

Über das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen des leuchtenden Wasserstoffs.

Von Rudolf Ladenburg.

1. Bei Fortsetzung meiner Untersuchung[1]) über die Eigenschaften des leuchtenden absorbierenden Wasserstoffs beobachtete ich[2]) an den stark verbreiterten „Spektralstreifen" Umkehrungserscheinungen, aus denen ich schloß, daß innerhalb der untersuchten Streifen der Quotient E/A, Emissions- durch Absorptionsvermögen, nicht konstant sei. Herr Pflüger[3]) dagegen glaubte die beobachteten Erscheinungen auch bei konstantem E/A dadurch erklären zu können, daß das Spektrum meiner „Lichtquelle" — einer mit Wasserstoff höheren Drucks gefüllten Kapillare — an der Stelle der Wasserstoffstreifen diffuse Maxima besäße, so daß jene Erscheinungen mit der häufig beobachteten mehrfachen Umkehrung von Spektrallinien identisch seien; dieser Ansicht schließt sich nun auch Herr Konen[4]) in einer in dieser Zeitschrift erschienenen Notiz an und erläutert seinen Standpunkt durch einige allgemeine Berechnungen zur Darstellung der an Spektrallinien beobachteten Umkehrungserscheinungen.

Bereits in der ursprünglichen Abhandlung[2]) habe ich (auf S. 65) darauf hingewiesen, daß meine Lichtquelle Maxima, die zu einer derartigen Erklärung berechtigten, nicht besäße. In einer weiteren Untersuchung[5]), die gleichzeitig mit der des Herrn Konen erschien, habe ich dann auf photometrischem Wege meine ursprünglichen Schlüsse bezüglich der Variation von E/A quantitativ bestätigt und zugleich bewiesen, daß die Erklärung meiner Versuche durch Herrn Pflüger — und damit auch diejenige des Herrn Konen — nicht zutrifft. Es sei mir hier eine kurze Wiederholung der Resultate gestattet[6]):

2. Untersucht wurde die Emission und Absorption einer 250 mm langen Wasserstoffschicht A unter 1,7 mm Druck, die von einem Induktorium mit parallel geschalteten Leidener Flaschen erregt wurde (vgl. Fig. 1). In diesem

1) Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 550, 1908; diese Zeitschr. **10**, 497, 787, 1909.

2) Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 54, 1910.

3) A. Pflüger, Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 208, 1910.

4) H. Konen, diese Zeitschr. **11**, 663, 1910; s. a. Astrophys. J. **32**, 249, 1910.

5) Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 553, 1910. Aus Mangel an einem geeigneten Gitter großer Dispersion und Lichtstärke habe ich diese Versuche mehrere Monate aufschieben müssen und sie schließlich nur dank der großen Liebenswürdigkeit des Herrn Geh. Rat Rubens ausführen können, der mir ein geeignetes Gitter zur Verfügung stellte.

6) Details der Versuchsanordnung u. der Messungen s. Verh. d. D. phys. G. **12**, 556 ff., 1910.

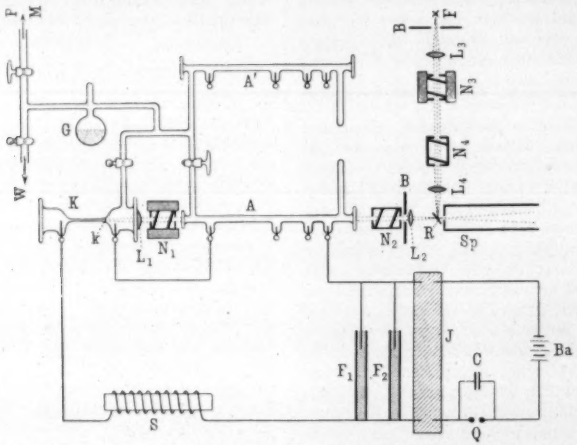


Fig. 1. A Absorptionsrohr, A' Ersatzrohr, B Blenden, Ba Batterie, C Kondensator, F Nernstfaden, F_1 F_2 Leidener Flaschen, G Trockengefäß, J Induktor, K Kapillare Lichtquelle, $L_1 \ldots L_4$ Linsen, M Manometer, $N_1 \ldots N_4$ Nicols, P Quecksilberpumpe, Q Quecksilberstrahlunterbrecher, R Planspiegel, S Selbstinduktionsspule, Sp Spektrometer, W Wasserstoff-Entwickelungsapparat.

Schwingungskreis befand sich außerdem statt einer Luftfunkenstrecke die zugleich als Lichtquelle dienende Quarzkapillare K von 66 mm Länge und 1,5 mm innerem Durchmesser, mit Wasserstoff von etwa 15 mm Quecksilberdruck gefüllt, die ich bereits bei früheren Versuchen[1]) benutzt habe. Das Entladungspotential der Leidener Flaschen betrug etwa 20000 Volt, die Kapazität der Leidener Flaschen[2]) 0,01 Mikrofarad, die Selbstinduktion des Schwingungskreises[2]) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Henry.

Das von den Wasserstoffröhren ausgehende Licht wurde mit einem Rowlandschen Plangitter spektral zerlegt, unmittelbar unterhalb dieses Spektrums dasjenige eines Nernststiftes entworfen, und mittelst einer vertikalen Okularblende aus diesen Spektren möglichst schmale Bezirke, von 1—2 Å., ausgeblendet und gegeneinander photometriert. So ergaben sich für die Abhängigkeit der Helligkeit der Wasserstoffröhren von der Wellenlänge in der Umgebung der roten Wasserstofflinie im Vergleich zu der des Nernststiftes die in Fig. 3 (S. 7) enthaltenen Kurven; und zwar stellt Kurve III die Helligkeitsverteilung $(e(\lambda) = E_3(\lambda))$ des von der Kapillare allein[3]) ausgesandten Lichtes dar, Kurve II diejenige $(E(\lambda) = E_2(\lambda))$ der untersuchten Wasserstoffschicht bei abgeblendeter Kapillare und Kurve I die Helligkeitsverteilung $(E(\lambda) + e(\lambda)[1 - A(\lambda)] = E_1(\lambda))$, die man beobachtet, wenn das Licht der Kapillare die leuchtende Wasserstoffschicht durchsetzt. Im letzteren Fall erblickte man bei geöffnetem Okularspalt die in Fig. 2 dargestellte Erscheinung[1]).

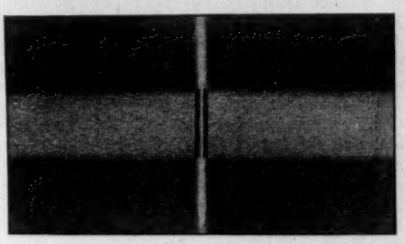


Fig. 2.

Was zunächst das Spektrum $E_3(\lambda)$ der „Lichtquelle" betrifft, so zeigt es das von den Herren Pflüger und Konen angenommene Maximum nicht, sondern ist für die vorliegende Untersuchung in der Tat als ein

1) Diese Zeitschr. 10, 497, 1909.

2) Gemessen nach der Bjerknes-Drudeschen Resonanzmethode mit variablem Luftkondensator und Thermoelement, während statt der Kapillare eine Luftfunkenstrecke im Schwingungskreise lag.

3) Zur Konstanz der elektrischen Erregungsbedingungen befand dabei sich im Stromkreis die der stromlosen Röhre A äquivalente Röhre A'.

1) Die Figur ist nach einer Zeichnung angefertigt.

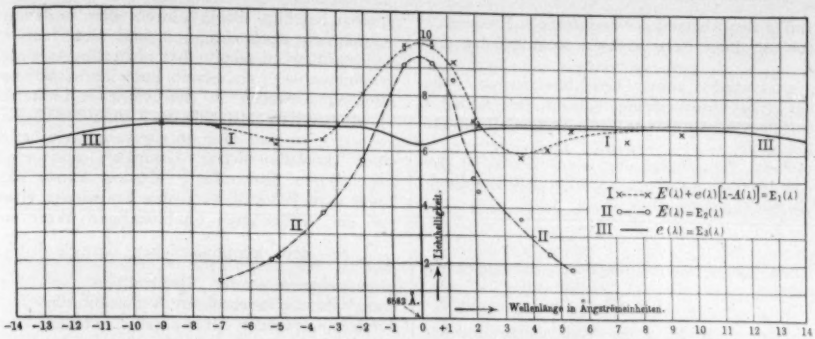


Fig. 3.

kontinuierliches Spektrum zu betrachten, — die schwache, etwa 2 Å. breite „Selbstumkehr" ist ohne Einfluß auf die Versuchsresultate.

Trotzdem weist die Kurve $E_1(\lambda)$ 2 Minima auf. Daraus folgt notwendig eine Variation des Quotienten $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ innerhalb des untersuchten Spektralstreifens. Denn einerseits ist $E(\lambda)$ in Kurve $E_2(\lambda)$ gegeben, und andererseits berechnet sich $A(\lambda)$ entsprechend seiner Definition aus der Gleichung

$$A(\lambda)=\frac{E_2(\lambda)+E_3(\lambda)-E_1(\lambda)}{E_3(\lambda)}.$$

So ergeben sich die in Fig. 4 gezeichneten Kurven.

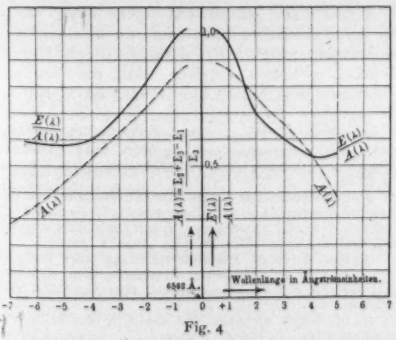


Fig. 4

Hierzu muß ich freilich bemerken, daß wegen der Schwierigkeit der Messung die Versuchsfehler der einzelnen Beobachtung etwa 10 Proz. betrugen[1]) und daß deshalb der Verlauf der Kurve $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ im einzelnen nicht zu garantieren ist; eine Konstanz wie $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ erscheint jedoch im untersuchten Falle mit den Versuchsergebnissen unvereinbar. Diese Messungen bestätigen also durchaus die früher aufgestellte Behauptung, daß unter den verwendeten Erregungsbedingungen der Quotient $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ der homogen leuchtenden Wasserstoffschicht innerhalb des Spektralstreifens H_α variiert.

3. Aus der oben erhaltenen Absorptionskurve läßt sich offenbar ohne weiteres die in der Dispersionstheorie auftretende Dämpfungskonstante berechnen[2]). Im Falle eines isolierten schwachen Absorptionsstreifens ergibt sich nämlich für die Abhängigkeit des Extinktionskoeffizienten $n\cdot\varkappa$ von der Schwingungszahl ν die Gleichung[3])

$$n\cdot\varkappa=2\pi\,\mathfrak{N}\,\frac{e^2}{m}\,\frac{\nu'}{\nu_0\,(4\,\mu^2+\nu'^2)},$$

in der $\mathfrak{N}$ die Zahl der „Dispersionselektronen", der Eigenfrequenz ν_0 pro Volumeneinheit, e ihre Ladung, m ihre Masse bezeichnet, ν' die „Dämpfungskonstante", definiert durch die Bewegungsgleichung des Elektrons

$$x''+\nu'x'+\nu_0^2x=\frac{e}{m}X,$$

1) Die einzelnen Punkte der reproduzierten Kurven sind Mittelwerte verschiedener Messungen.

2) Vgl. die kürzlich erschienenen höchst interessanten Bestimmungen der Dämpfung der Eigenschwingungen im Natriumdampf von L. Mandelstam (diese Zeitschr. II. 752, 1910) und von G. v. Ubisch (diese Zeitschr. II, 753. 1910).

3) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. Leipzig 1908, S. 103 ff.

und μ den Abstand der betreffenden Frequenz ν von ν_0; dabei ist μ so klein vorausgesetzt, daß

$$\nu_0^2 - \nu^2 = 2\,\nu_0\,\mu$$

gesetzt werden kann. Bezeichnet ferner I_0 die auf eine absorbierende Schicht der Länge l auffallende Intensität, so ist die hindurchdringende Intensität

$$I = I_0\, e^{-kl},$$

und bei Vernachlässigung der Reflexion ist das Absorptionsvermögen der Schicht definiert durch die Gleichung

$$A = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-kl};$$

hierin hängen k und $n \cdot \varkappa$ durch die Gleichung

$$k = 4\pi \frac{n \cdot \varkappa}{\lambda}$$

zusammen, in der λ die Wellenlänge des betreffenden Lichtes in der absorbierenden Substanz bedeutet. Bezeichnen wir mit B den Briggschen Logarithmus der Größe $\frac{1}{1 - A(\lambda)}$, so ergibt sich aus den Werten von B für 2 verschiedene Frequenzen ν_1 und ν_2

$$\nu'^2 = 4\,\frac{\nu_1^2 B_1 - \nu_2^2 B_2}{B_2 - B_1}.$$

Aus den in den Fig. 2 und 3 reproduzierten Kurven folgt im Mittel[1])

$$\nu' = 2{,}5 \cdot 10^{12}.$$

Diese Zahl stimmt der Größenordnung nach mit den früher aus Dispersions- und Absorptionsversuchen berechneten überein; sie ist jedoch absolut genommen größer als der Wert, den ich im Falle des hier untersuchten niedrigen Drucks bei der früheren Berechnung[2]) des Quotienten E/A aus elektronentheoretischen Ansätzen auf Grund von Schätzungen aus der Dispersion und der Linienbreite benutzt hatte ($^1/_8 \cdot 10^{12}$). Infolgedessen liefert die mit diesem Wert durchgeführte Berechnung einen Verlauf von E/A, der dem früher für höheren Druck berechneten ähnlich, mit dem jetzt beobachteten nicht übereinstimmt (vgl. Fig. 6, Kurve I, l. c.). Jene Ansätze aber so abzuändern, daß eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten erzielt wird, scheint mir, wenn auch nicht undurchführbar, so doch verfrüht.

Man kann sich nämlich zur Erklärung der Versuchsresultate vorstellen, daß verschiedene Gattungen von Emissionszentren („Dispersionselektronen“[3])) an dem Aufbau der Spektralstreifen beteiligt sind[1]), obwohl dies in den beschriebenen Beobachtungen und den hier erhaltenen Kurven unmittelbar nicht zum Ausdruck gekommen ist[2]); andrerseits habe ich bei höheren Drucken bisweilen in den stark verbreiterten Spektralstreifen einen helleren Kern unterscheiden können[3]), so daß man an ein Zusammenfließen eines „kontinuierlichen Grundes“ und einer „eigentlichen Spektrallinie“ denken kann. Erkennt man jeder dieser beiden Emissionen einen von der Wellenlänge unabhängigen Wert von $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ zu, dem kontinuierlichen Grunde jedoch einen kleineren als der „Spektrallinie“, so könnte man wohl die beobachtete Variation von E/A durch Superposition der zwei verschiedenen Werte von E/A erklären[4]).

Wollte man schließlich versuchsweise die „Temperatur“ des untersuchten leuchtenden Wasserstoffs durch die Temperatur desjenigen schwarzen Körpers definieren, dessen Emissionsvermögen $e(\lambda)$ gleich dem Quotienten $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ des Wasserstoffs für dieselbe Wellenlänge λ ist — unbekümmert darum, daß natürlich von einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand des untersuchten Wasserstoffs nicht die Rede sein kann —, so erhielte man jedenfalls bereits für die verschiedenen Wellenlängen des **einen** Emissionsstreifens H_α verschiedene „Temperaturen“.

4. Die interessanten Berechnungen, die Herr Konen (l. c.) gelegentlich der Kritik meiner Versuche angestellt hat, verlieren durch die hier angestellten Betrachtungen natürlich nichts von ihrer Bedeutung an sich; für meine Versuche kommt freilich höchstens der relativ einfache Fall (§ 4) in Anwendung, daß bei konstantem E/A und einer „einfachen“ Spektrallinie gegen ein kontinuierliches Spektrum nur eine einfache Umkehrung möglich ist; denn die beschriebenen Messungen haben ergeben, daß die benutzte Lichtquelle praktisch ein kontinuierliches Spektrum

1) Die aus verschiedenen zusammengehörigen Wertepaaren nach obiger Gleichung berechneten Werte von ν' stimmen untereinander befriedigend überein.

2) Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 79 (Fig. 6), 1910.

3) Die von Michelson (Phil. Mag. [5] **24**, 463, 1887) entdeckte Duplizität der roten Wasserstofflinie (Abstand der Komponenten 0,14 Å.) könnte eventuell eine Unsymmetrie des Quotienten E/A bezüglich des Schwerpunktes des Spektralstreifens, aber niemals die beobachtete Variation von E/A hervorrufen.

1) Vgl. meinen Hinweis, Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 564, 1910. Der untersuchte Spektralstreifen wäre dann also nicht als eine „einfache Linie“ zu bezeichnen, vgl. H. Konen, l. c., S. 664.

2) Die wechselnde Größe der Stromstärke der den Wasserstoff erregenden Schwingungen als Ursache für die Variation von E/A anzunehmen, scheint mir nicht möglich (vgl. Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 564, Anm. 1, 1910).

3) Eine derartige Intensitätsverteilung wäre übrigens auch bei einem homogenen Spektralstreifen, d. h. nur einer Gattung von Emissionszentren, aber variablem E/A erklärbar.

4) Bei hohen Drucken, bei denen in der Mitte des Spektralstreifens ein kleiner Wert von E/A, an den Rändern ein großer Wert dieses Quotienten aus den Beobachtungen erschlossen wurde (vgl. Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 64 u. f.), müßte dann der kontinuierliche Grund einen großen Wert von E/A besitzen, die „Spektrallinie“ einen kleinen, — was freilich höchst unwahrscheinlich ist.

emittiert. Die beobachtete doppelte Umkehr wäre dann auch nach den Berechnungen des Herrn Konen ein Beweis für die Inkonstanz von $\frac{E(\lambda)}{A(\lambda)}$ im Bereiche des untersuchten Spektralstreifens.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, November 1910.

(Eingegangen 6. Dezember 1910.)

Astrophysikalische Bemerkungen im Anschluß an Versuche über Absorption und anomale Dispersion in leuchtendem Wasserstoff.

Von Rudolf Ladenburg.

1. Bei der Messung des Absorptionsvermögens leuchtender Wasserstoffschichten[1]) zeigte sich, daß die Absorption an den Wasserstofflinien H_α, H_β und H_γ mit abnehmender Wellenlänge kleiner wird, wenn als „Lichtquelle" eine der absorbierenden Wasserstoffschicht gleiche verwendet wird. Dies ist eine Bestätigung der Erklärung, die Wood[2]) für die verschiedene Farbe verschieden langer Wasserstoffschichten gegeben hat. Vergleicht man an derartigen Wasserstoffschichten quantitativ die Helligkeit entsprechender Wasserstofflinien, so findet man bei gleicher Helligkeit der Linien H_α, daß die blaugrüne Linie H_β der langen Wasserstoffschicht die der kurzen überwiegt, und unter geeigneten Bedingungen erscheint, wenn H_β in beiden Spektren gleich hell ist, H_α der kurzen und H_γ der langen Wasserstoffschicht heller als die entsprechende Linie der andern Schicht. Diese Resultate erinnern an diejenigen, die Campbell[3]) beim Vergleich der Helligkeit des Wasserstoffspektrums des Orionnebels mit dem einer Geißlerröhre erhielt: war H_β in beiden Spektren gleich hell, so erschien H_γ im Nebel heller als in der Geißlerröhre, und H_α der Röhre war sichtbar, H_α des Nebels nicht. Campbell bestätigt hierdurch seine früheren Versuche über die Spektren verschiedener Stellen desselben Nebels, aus denen er geschlossen hatte, daß die Intensitäten der Spektrallinien der verschiedenen Spektren in wesentlich verschiedenen Verhältnissen zueinander stünden. Hieraus aber nun weitere Konsequenzen über die Temperaturverhältnisse der an den Spektren beteiligten Gase zu ziehen, scheint — selbst wenn man annähme, daß es sich hier um Temperaturstrahlung handelte — wegen der verschiedenen Größe der Absorption für die verschiedenen Wasserstofflinien jedenfalls nicht einwandfrei, solange nicht die betreffenden Gasschichten für alle in Betracht kommenden Linien „unendlich dick" sind, d. h. solange sie nicht für die betreffenden Spektrallinien als „vollkommen schwarz" angesehen werden dürfen[1]). Da diese Bedingung für die von Campbell benutze Geißlerröhre sicher nicht der Fall war, so folgt aus diesen Versuchen nichts über das Verhältnis der Temperatur des Nebels zu der des Rohres. Auf Grund der nun bekannten Bedingungen der Absorption des leuchtenden Wasserstoffs ließen sich aber wohl unschwer Wasserstoffschichten im Laboratorium herstellen, die wenigstens bez. der sichtbaren Wasserstofflinien als „vollkommen schwarz" anzusehen wären, und bei den Nebelspektren wird man es wohl meist mit genügend großen Schichten zu tun haben, so daß sie als „schwarz" betrachtet werden können.

2. Die bei der Umkehr verbreiterter Wasserstofflinien von mir beobachteten Erscheinungen[2]), (vgl. speziell die Fig. 2 meiner vorhergehenden Abhandlung: Über das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen des leuchtenden Wasserstoffs) zeigen dieselbe Struktur, die man in einigen stark verbreiterten Fraunhoferschen Linien der Sonne wahrgenommen hat. Besonders in den breiten, dunklen „Kalziumstreifen", den Fraunhoferschen Linien H und K, sowie in den Absorptionslinien des Wasserstoffs (C, F etc.) sieht man meist eine helle Linie, die ihrerseits bei genügender Dispersion durch eine feine schwarze Linie in zwei Teile geteilt ist[3]). Hale und Deslandres, die mit den einzelnen Teilen dieser Linien spektroheliographische Aufnahmen gemacht haben, erklären diese Erscheinungen meist durch die Wirkung verschieden dichter und verschieden heißer, übereinandergelagerter Schichten des betreffenden Gases. Trotz der auf diesen Schlüssen basierenden großartigen Fortschritten unserer Kenntnis von der Konstitution der Sonne ist nach meiner Ansicht bei solchen Konsequenzen in Betracht zu ziehen, daß man

1) R. Ladenburg, Verh. d. D. Phys. Ges., **10**, 550, 1908.

2) R. W. Wood, diese Zeitschr. **7**, 926, 1906.

3) W. W. Campbell, Astrophys. J. **9**, 249, 1899. vgl. hierzu H. Kayser, Handb. d. Spektr. **2**, 332, 1902.

1) Dies ist, soweit mir bekannt, bisher nicht berücksichtigt worden, da die Absorption des leuchtenden Wasserstoffs nicht näher untersucht war (vergl. speziell die in Anm. 3 der vorherg. Sp. zitierten Arbeiten).

2) Verh. d. D. phys. Ges. **12**, 54, 549, 1910; diese Zeitschr. **12**, 5, 1911.

3) Bezüglich der zahlreichen Literatur hierüber vgl. E. Pringsheim, Physik der Sonne, 1910, S. 346 u. f., besonders Fig. 192—196, ferner die neuesten Arbeiten von H. Deslandres und L. d'Azambuja, C. R. **148**, 1011, 1235; **149**, 119, 513, 1909; G. E. Hale, C. R. **148**, 1025, 1909 u. W. H. Julius, diese Zeitschr. **11**, 56, 1910.

die betreffenden Erscheinungen, wie meine Versuche zeigen, auch bei vollkommen gleichmäßig geschichtetem und gleichmäßig erregtem Wasserstoff beobachten kann, falls die „Lichtquelle", deren Licht das leuchtende Gas durchsetzt, die geeignete Helligkeit besitzt. Vielleicht ist eine derartige Erklärung auch für das Zustandekommen jener Inhomogenitäten einiger Fraunhoferschen Linien dort von Nutzen, wo die übliche Erklärung aus andern Gründen versagt.

3. Meine dritte Bemerkung betrifft die anomale Dispersion des leuchtenden Wasserstoffs in der Umgebung seiner Emissionslinien, die bekanntlich von Julius zur Erklärung einer Reihe spektroskopischer Erscheinungen auf der Sonne angenommen worden ist[1]), speziell die verschiedene Größe der anomalen Dispersion an den verschiedenen Wasserstofflinien, die Herr Julius voraussetzt[2]).

Bei Auffindung der anomalen Dispersion an der roten Wasserstofflinie wiesen Herr St. Loria und ich[3]) darauf hin, daß wir dieselbe Erscheinung an der blaugrünen Linie H_β nicht erkennen konnten, und schlossen hieraus und aus Absorptionsversuchen, daß die anomale Dispersion an H_β bedeutend kleiner als an H_α sein müsse. Ebenso konnte ich[4]) zwar die anomale magnetische Drehung der Polarisationsebene (Macaluso-Corbinoeffekt) in der Nähe von H_α mit Sicherheit nachweisen, an H_β gelang mir jedoch dieser Nachweis nicht. Bei geeigneten Erregungsbedingungen des Wasserstoffs war es möglich, diesen Effekt an H_α relativ genau quantitativ zu verfolgen und aus dem Mißerfolg an H_β zu berechnen, daß dieser Effekt an H_β viel kleiner als an H_α sein müsse. Dadurch wurde es wahrscheinlich gemacht, daß die aus jenem Effekt nach der gewöhnlichen Dispersionstheorie zu berechnende Zahl $\mathfrak{N}$ der „Dispersionselektronen" an H_α merklich größer als an H_β sein müsse, — soweit negative Resultate Schlüsse zulassen.

1) Zusammenfassend dargestellt z. B. von Julius, diese Zeitschr. **11**, 56, 1910 oder in dem oben zitierten Buch von Pringsheim, S. 270 ff.

2) W. H. Julius, Proc. R. Ac. Amst. XI, 253, 1908 u. a. O.; vgl. hierzu Anm. 3.

3) R. Ladenburg u. St. Loria, diese Zeitschr. **9**, 875, 1908. Wenn wir am Schluß in einer Fußnote bemerkten, daß die Juliussche Sonnentheorie für die an den verschiedenen Wasserstofflinien stattfindende anomale Dispersion die gleiche Größe voraussetzt, so möchte ich, einer brieflichen Mitteilung des Herrn Professor Julius entnehmend, hervorheben, daß Herr Julius eine derartige Ansicht niemals geäußert hat und daß dieselbe auf einer irrtümlichen Auffassung unsererseits beruht. Im Gegenteil hat Herr Julius in Fig. 3 der in Anm. 2 zitierten Abhandlung die von ihm angenommene verschiedene Größe der anomalen Dispersion von $H\alpha$ und $H\delta$ graphisch dargestellt.

4) Diese Zeitschr. **10**, 497, 1909; Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur, Naturw. S., 1909, S. 112 ff.

Dieser Schluß scheint mir aber durch die folgenden quantitativen Untersuchungen über die anomale Dispersion des Wasserstoffs sichergestellt.

Theoretisch hat übrigens Cl. Schaefer[1]) aus seiner „Dispersionstheorie der Serienspektren"[2]) allgemein eine Abnahme jener experimentell bestimmbaren Größe $\mathfrak{N}$ mit abnehmender Wellenlänge für die zu einer Serie gehörenden Linien gefolgert und hat dabei dieser Größe $\mathfrak{N}$ eine etwas andere Bedeutung als in der gewöhnlichen Dispersionstheorie zugesprochen.

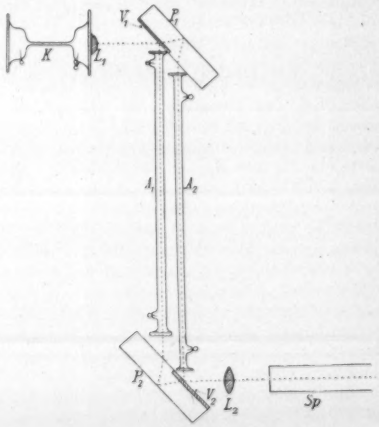


Fig. 1.

K Quarzkapillare, $A_1 A_2$ Absorptionsrohre, $P_1 P_2$ Jaminsche Spiegel, $L_1 L_2$ Linsen, *Sp* Spektralapparat, $V_1 V_2$ halbdurchlässig versilberte Flächen.

Als Untersuchungsmethode bei meinen Dispersionsversuchen diente wieder die zuerst von Puccianti[3]) angegebene Methode der „horizontalen Interferenzstreifen". Die Versuchsanordnung (vgl. Fig. 1) unterschied sich von der früher benutzten nur dadurch, daß sich statt eines Rohres zwei miteinander und mit dem Wasserstoffapparat, Pumpe usw. verblasene Rohre im Strahlengang befanden, so daß jeder der beiden Strahlen zwischen den Jaminschen Spiegeln je ein Rohr durchsetzte. Zugleich war je eine Hälfte der Vorderseite jedes der Jaminschen Spiegel (V_1 von P_1 und V_2 von P_2, vgl. Fig. 1) halbdurchlässig versilbert; dadurch beträgt, von andern kleinen Vorteilen ab-

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. (4) **32**, 883, 1910.

2) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. (4) **28**, 421; **29**, 715, 1909.

3) L. Puccianti, Il Nuovo Cimento **2**, 257, 1901.

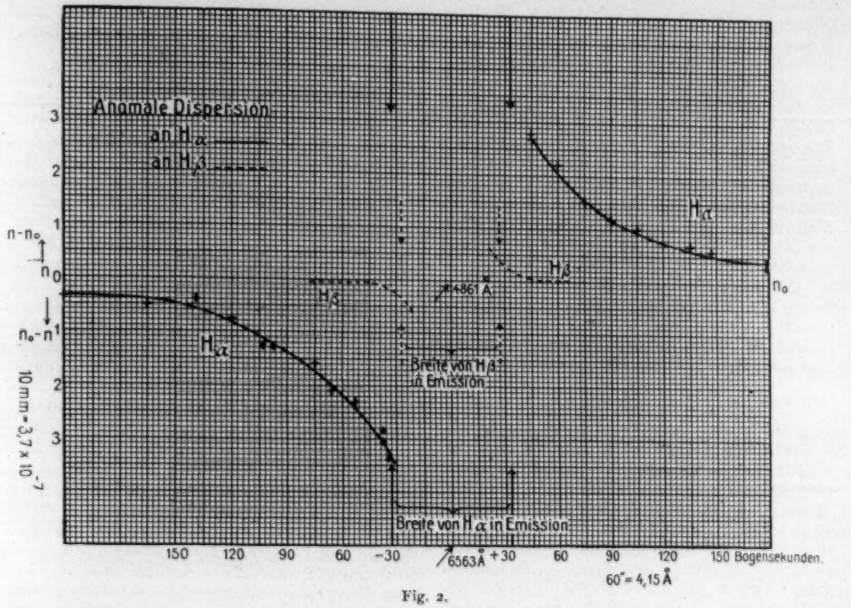


Fig. 2.

gesehen, die Intensität des den 2. Spiegel verlassenden Lichtes etwa viermal soviel als ohne Versilberung. So konnte ich mit großer Dispersion (Rowlandsches Plangitter, das mir Herr Geh.-Rat Rubens liebenswürdigerweise zur Benutzung überlassen hat) und engem Spalt arbeiten. Die Erregungsbedingungen des Wasserstoffs waren gegen die früheren Dispersionsversuche wesentlich verändert, da ich die in der vorherhergehenden Abhandlung (S. 6) erwähnte Quarzkapillare benutzte und dadurch sehr hohe Stromamplituden erzielen konnte. Beobachtet wurde wie früher die Ablenkung, die die horizontalen Interferenzstreifen in der Nachbarschaft der Absorptionslinien erfuhren. Diese Ablenkungen konnten mittels Okularmikrometer gemessen, die zugehörigen Wellenlängen in Bogensekunden am Spektrometerteilkreis abgelesen werden[1]). Die obige Fig. 2 enthält die graphische Darstellung einer Dispersionsmessung, wobei die an H_α und H_β unter gleichen Bedingungen erhaltenen Resultate der Übersichtlichkeit wegen auf denselben Koordinatenanfangspunkt bezogen sind.

Da die sichtbaren Wasserstofflinien weit voneinander entfernt liegen, läßt sich die in der unmittelbaren Umgebung einer dieser Linien stattfindende anomale Dispersion bekanntlich sehr einfach[1]) darstellen durch die Gleichung

$$n - n_0 = \frac{D}{\lambda - \lambda_0}, \text{ wobei}$$

$$D = \Re \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\lambda_0^3}{4\pi^2 c n_0};$$

hier bedeutet n den beobachteten Brechungsquotienten, n_0 denjenigen, der in dem betrachteten Bereich um die Wellenlänge λ_0 herrschen würde, wenn die entsprechende Elektronengattung nicht vorhanden wäre; e und m die Ladung und Masse dieser Elektronen und $\Re$ die Zahl der Elektronen der Gattung λ_0 in der Volumeneinheit. Die Änderung des Brechungsexponenten ist durch die Verschiebung der

1) Einzelheiten dieser Messungen werden zusammen mit Einzelheiten über die Untersuchung der Magnetorotation demnächst an andrer Stelle veröffentlicht werden.

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, 1908, S. 112; auch für die anomale Dispersion des leuchtenden Wasserstoffs kann man die Dämpfung in erste Annäherung vernachlässigen.

Interferenzstreifen gegeben, so daß das Produkt P aus Streifenverschiebung und Wellenlängenabstand vom Schwerpunkt der Spektrallinie ein Maß für die Größe D ist.

Es zeigte sich nun (vgl. Fig. 2), daß diese Größe P bei H_β nur etwa $^1/_{10}$ des bei H_α gefundenen Wertes ist. Da aber die anomale Dispersion bereits bei H_α sehr klein ist — etwa entsprechend einer Änderung des Brechungsexponenten um 5 Einheiten der 7. Dezimale im Abstand von 5 Å-Einheiten vom Schwerpunkte der Linie —, so konnte die Größe P bei H nur angenähert gemessen werden.

Die bei veränderten Erregungsbedingungen beobachtbaren Änderungen der anomalen Dispersion scheinen bei H_α und bei H_β ganz parallel zu gehen, so daß bis jetzt wenigstens eine außerhalb der Beobachtungsfehler liegende Variation von $\frac{P_{H\alpha}}{P_{H\beta}}$ nicht beobachtet wurde. Berücksichtigt man, daß D der dritten Potenz von λ_0 proportional ist, so erhält man für die sogenannte Zahl der Dispersionselektronen bei H_β im Verhältnis zu H_α etwa den Wert $^1/_4$; bei H_γ scheint nun nach meinen bisherigen Versuchen die anomale Dispersion jedenfalls wieder kleiner als bei H_β zu sein, so daß wir aus diesen Versuchen schließen, daß unter den benutzten Erregungsbedingungen an den Linien der 2. Nebenserie des Wasserstoffs jene experimentell bestimmbare Größe $\Re$ mit wachsender Ordnungszahl für die einzelnen Glieder der Serie abnimmt[1]).

Ob dies auch unter den Leuchtbedingungen des Wasserstoffs auf der Sonne der Fall ist, darüber können irdische Versuche wenig aussagen; jedoch legalisieren die beschriebenen Versuche die erwähnte Annahme von Julius, daß die anomale Dispersion an den Linien der Wasserstoffserie H_α, H_β . . . verschieden große Werte besitzt.

1) Vor mehreren Jahren hat R. W. Wood bei seinen bekannten Versuchen (Phil. Mag. (6) **8**, 293, 1904) über die anomale Dispersion in nichtleuchtendem Natriumdampf beobachtet, daß die Größe dieser anomalen Dispersion an der Linie 5890 diejenige an den folgenden Linien der Hauptserie (3303 u. 2852) weit überwiegt. In einer kürzlich in den Proc. Roy. Soc. erschienenen Arbeit (Proc. Roy. Soc. (A) **84**, 209, 1910) erhält ferner Bevan durch quantitative Messungen an den Linien der Hauptserie des Kaliums eine noch viel raschere Abnahme der Größe D, als ich sie am Wasserstoff beobachtet. Bevan konnte diese Größe bis zur 4. Linie messen und die Erscheinung an weiteren 3 Linien beobachten.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, November 1910.

(Eingegangen 6. Dezember 1910.)

Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen.

Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Stark[1]).

Von Peter Paul Koch.

Unter der an der Spitze stehenden Überschrift hat Stark eine Reihe von Resultaten veröffentlicht, die er bei Beobachtungen an einem Beugungsgitter gefunden hat, und die, falls sie sich bewahrheiten sollten, geeignet wären, unsere derzeitigen Anschauungen von den Grundlagen der Optik umzustürzen. Im folgenden soll jedoch gezeigt werden, daß die genannten Resultate mit einiger Wahrscheinlichkeit nicht bedingt sind durch die Eigenschaften des benutzten Gitters und der damit untersuchten Strahlung, sondern durch das von Stark angewandte photographisch-photometrische Meßverfahren.

Es handelt sich bei den Messungen Starks darum, für zwei Lichtquellen sehr verschiedener Intensität, den Lichtbogen (Intensität 10^5) und den Glimmstrom (Intensität 1) durch Quecksilberdampf, die Art festzustellen, wie sich die auf ein Beugungsgitter auffallende Energie bestimmter Spektrallinien auf die Spektren verschiedener Ordnung verteilt. Bezeichnet man die Intensität dieser Spektren verschiedener Ordnung für den Fall der Beleuchtung des Gitters mit Licht vom Bogen mit J_{bk}; $k = 1, 2, 3 \ldots$, entsprechend für den Fall der Beleuchtung mit Licht vom Glimmstrom mit J_{gk}; $k = 1, 2, 3 \ldots$, so kommt es an auf die Messung der Verhältnisse:

$$V_k = \frac{J_{bk}}{J_{gk}}; \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Stark findet dabei das am Beginn dieser Notiz in bezug auf seine grundlegende Wichtigkeit charakterisierte Resultat, daß V_k für wachsende k von $k = 1$ bis $k = 14$ ganz beträchtlich zunimmt und zwar im stärksten Fall um rund 70 Proz.

Die Meßmethode Starks ist, wie bemerkt, eine photographisch-photometrische. Sie beruht darin, daß er die Lichtbogen- und die Glimmstromspektren durch geeignete Wahl der Expositionszeiten derart auf eine photographische Trockenplatte exponiert, daß beide Arten von Spektralaufnahmen, Ordnung für Ordnung genommen, nach der Entwicklung ungefähr die gleiche Schwärzung besitzen. Die Berechnung des gesuchten Intensitätsverhältnisses erfolgt dann mit Hilfe der aus einer kleinen Erweiterung

1) Sitzungsber. d. k. Akadem. d. Wissensch. in Wien **119**, 779, 1910.

des Schwarzschildschen Gesetzes[1]) folgenden Gleichungen:

$$V_k = \frac{J_{bk}}{J_{gk}} = \left(\frac{t_g}{t_b}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(1 + \frac{S_{bk} - S_{gk}}{m}\right); k = 1, 2 \ldots$$

Dabei sind die t und t_b die Expositionszeiten, die nötig waren, um die resp. Schwärzungen S_{bk} und S_{gk} für Bogen und Glimmstrom hervorzurufen. n und m sind „Plattenkonstanten".

Gegen die Benutzung dieser Gleichung und zwar speziell gegen das durch keinerlei mitgeteilte Beobachtungsdaten berechtigte Konstantsetzen von $\frac{n}{m}$ über den ganzen in Betracht kommenden Schwärzungsbereich hin besteht nun meiner Ansicht nach ein schwerwiegendes Bedenken.

Denn eine einfache Überschlagsrechnung zeigt zunächst, wie gering die Änderung von $\frac{n}{m}$ mit der Schwärzung nur zu sein braucht, um eine enorme Änderung im berechneten Werte von

$$\frac{J_{bk}}{J_{gk}} = V_k$$

hervorzubringen, eben weil $\frac{t_g}{t_b}$ von der Größenordnung 10^5 ist. Es genügt eine Änderung von $\frac{n}{m}$, von rund 0,95 mit 1,00 d. h. von 5—6 Proz. um V_k um rund 100 Proz. zu ändern, das ist ein Betrag, der mehr als hinreicht, um die von Stark gefundene Änderung von V_k mit der Ordnung der Gitterspektren, die sich ja gerade durch ihre sehr verschiedenen Schwärzungen voneinander unterscheiden, zu erklären. Damit vollends die beanspruchte Genauigkeit von 10 Proz. für V_k garantiert werden könnte, müßte erst der Nachweis erbracht werden, daß $\frac{n}{m}$ sich im ganzen Schwärzungsbereich um nicht mehr als um rund 0,8 Proz. geändert hätte.

Sehen wir demgegenüber zu, was über das Verhalten von $\frac{n}{m}$ experimentell festgestellt worden ist. Soweit dem Verfasser bekannt, ist in der Literatur nirgends ein Anhalt dafür zu finden, daß $\frac{n}{m}$ auch nur in einem Spezialfall über die von Stark benutzten Schwärzungsgebiete hin bis auf 0,8 Proz. von der Schwärzung unabhängig gefunden worden wäre. Sogar die erwähnten Arbeiten von Schwarzschild[1]) lassen die Möglichkeit einer Inkonstanz von $\frac{n}{m}$ in dem zur natürlichen Erklärung von Starks Beobachtungen notwendigen Betrag durchaus zu und alle anderen neueren Veröffentlichungen, die zugunsten einer in Spezialfällen gefundenen Konstanz herangezogen werden könnten, sind mit recht großen Fehlergrenzen behaftet. Beispielsweise gibt Leimbach[2]), der die Gültigkeit des Schwarzschildschen Gesetzes neuerdings bestätigt fand, seine Meßfehler mit 5 bis 10 Proz. an.

Demgegenüber häufen sich in der letzten Zeit mit der Steigerung der Meßgenauigkeit die Hinweise auf die experimentelle Feststellung systematischer Veränderlichkeit von $\frac{n}{m}$ mit der Schwärzung.

So fand Parkhurst[3]) bei seinen Versuchen mit käuflichen Trockenplatten, daß $\frac{n}{m}$ mit wachsender Schwärzung ganz beträchtlich und zwar bis zu 30 Proz. zunahm innerhalb von Schwärzungsgebieten, die bei photographisch-photometrischen Anwendungen leicht in Betracht kommen. Bemerkungen über Inkonstanz von $\frac{n}{m}$ findet man weiter bei Ives[4]) und schließlich beim Verfasser, der seinerzeit in einer Reihe nicht veröffentlicher Versuche, auf die er jedoch kurz hingewiesen hat[5]), eine systematische Abhängigkeit von $\frac{n}{m}$ von der Schwärzung im selben Sinn und von derselben Größenordnung wie bei Parkhurst feststellte.

Es scheint dabei von besonderem Interesse, daß eine Veränderlichkeit von $\frac{n}{m}$ mit der Schwärzung gerade in diesem Sinn und obendrein von bedeutend geringerem Betrag, als sie bei den verschiedensten käuflichen Plattensorten eher die Regel zu sein scheint, erforderlich wäre, um die von Stark erhaltenen Werte von V_k für die Spektren höherer Ordnung und somit geringerer Schwärzung mit den entsprechenden Werten für die Spektren niederer Ordnung in Einklang zu bringen.

Leider sind die Zahlenangaben Starks nicht so ausführlich mitgeteilt, daß sie zu einer diesbezüglichen Diskussion seiner Resultate herangezogen werden könnten. Es hat deswegen

1) Astrophys. Journ. **11**, 89, 1900. Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Wien 1900.

1) Beiträge. Wien.
2) Zeitschr. f. wissensch. Photogr. **7**, 157, 1909.
3) Astrophys. Journ. **30**, 33, 1909.
4) Astrophys. Journ. **31**, 157, 1910.
5) Ann. d. Phys. (IV) **30**, 841, 1909.

auch keinen Sinn, an dieser Stelle auf nähere Einzelheiten einzugehen. Nur das eine scheint bemerkenswert, daß man in der ganzen Arbeit keine Stelle findet, die darauf hinweist, daß die Wichtigkeit des Nachweises der Konstanz von $\frac{n}{m}$ im benutzten Schwärzungsbereich erkannt und dementsprechend der Nachweis zahlenmäßig durchgeführt worden wäre. Die weitere Tatsache, daß n und m nur auf zwei Dezimalstellen, d. h. auf $+2$ Proz. genau angegeben werden, scheint dafür zu sprechen, daß Stark selbst seinen Wert $\frac{n}{m}$ für nicht genauer als auf $+4$ Proz. verbürgt hält.

Faßt man alles zusammen, so wird ein Zweifel darüber kaum bestehen bleiben können, daß die Starkschen Beobachtungen noch nicht experimentell so weit gestützt sind, daß sich die daraus gezogenen Schlußfolgerungen[1]) rechtfertigen lassen.

Man wird somit, meiner Ansicht nach, mit einer Revision der Anschauungen, die man zurzeit von den Grundlagen der Optik und der Natur des Lichtes besitzt, so lange warten dürfen, bis Stark den experimentellen Nachweis erbracht hat, daß $\frac{n}{m}$ innerhalb der von ihm benutzten Werte von Lichtintensität, Belichtungsdauer und daraus erzielter Schwärzung für seine Trockenplatten bis auf rund 1 Proz. konstant gewesen ist.

1) Siehe diesbezüglich auch die neueste Veröffentlichung Starks: Folgerungen über die Natur des Lichtes aus Beobachtungen über die Interferenz, Jahrb. d. Radioakt. 7, 386, 1910.

München, Physikalisches Institut der Universität, 15. Dezember 1910.

(Eingegangen 17. Dezember 1910.)

Versuche mit Funkeninduktoren und Röntgenröhren.

Von Friedrich Dessauer.

I.

Vor einiger Zeit berichtete ich an dieser Stelle (diese Zeitschr. **10**, 859, 1909) über die Art und Weise, wie es mir gelang, ein für die Medizin wichtiges Problem zu lösen, nämlich die Entladung eines Funkeninduktors so zu steigern, daß mit einem einzigen, durch die Röntgenröhre geleiteten Induktionsschlage das Radiogramm des menschlichen Rumpfes dargestellt werden konnte. An diese Arbeiten schlossen sich weitere, gleichfalls den medizinischen Zwecken dienende. Soweit sie physikalisch interessante Details enthalten, will ich im nachfolgenden kurz berichten.

Zunächst gelang es dem bekannten holländischen Arzt und Naturforscher P. H. Eijkman und mir, mit dem Einzelschlagverfahren eine Bewegungsaufnahme des schlagenden menschlichen Herzens zu machen und zwar in folgender Weise:

Ein Sphygmograph (Pulsschreiber) wurde in der bekannten Weise am Handgelenk befestigt. Der mit dem Herzschlag auf- und niedersteigende Blutdruck der Armschlagader bewegt dabei einen Hebel auf und nieder, dessen Ende auf berußtes Papier schreibt. Der jeweilige Ausschlag des Hebels entspricht der verursachenden Tätigkeit des Herzmuskels mit einer kleinen Phasenverschiebung t_1, deren Bedeutung die Zeit ist, welche das Blut braucht, um vom Herzen zur Auflagestelle des Apparates zu fließen. Leider muß man sich hinsichtlich dieser Zeit mit sehr ungenauen in der medizinischen Literatur gemachten Angaben begnügen, da die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes nicht nur individuell, sondern auch im Verlaufe jeder Herzperiode auf und nieder schwankt. Der hierdurch entstehende Fehler mußte bei der Untersuchung in den Kauf genommen werden. Er ist indessen nicht allzu groß.

Die Periode der Herztätigkeit dauert ungefähr 0,8″. In dieser Zeit erweitert sich das Herz, um das zurückströmende (venöse) Blut einzusaugen. Diese Phase, in der Medizin „Diastole“ genannt, bringt im arteriellen System ein Sinken des Blutdruckes hervor, der Hebel des Sphygmographen geht also langsam nach abwärts. Nach Erreichung der Amplitude nach unten kontrahiert sich sehr plötzlich der Herzmuskel, um mit Heftigkeit das Blut in das Arteriennetz hinauszupressen. Der Sphygmographenhebel schnellt plötzlich in die Höhe.

Um von der Tätigkeit des Herzens ein hinreichendes Bild zu bekommen, schien es notwendig, wenigstens 10, besser aber 12 Phasen der Herzperiode aufzunehmen, die in möglichst gleichen Abständen liegen sollten. Gleiche Abstände der Phasen der eigentlichen Herztätigkeit konnten aber wegen der schon angeführten Inkordanz der Zeit t_1 nicht sicher gewählt werden. Deshalb zogen wir es vor, die vom Sphygmographen angegebene Pulstätigkeit in 12 gleiche Teile zu zerlegen und sie aufzunehmen.

Nun hatte sich schon vorher herausgestellt, daß es nicht möglich ist, mit dem in obenzitierter Arbeit angeführten Verfahren eine so große Anzahl Schläge in 0,8″ mit ungeschwächter Wucht zum Ablauf zu bringen. Denn die erforderliche Kraft des Einzelschlages, mit dem

eine hinreichende photographische Wirkung durch den Rumpf hindurch erzielt werden soll, muß sehr groß sein. Die dazu notwendige elektromagnetische Masse des Induktors ist zu träge. Wiegt doch der sorgsam unterteilte Eisenkern des verwendeten Rieseninduktors nahezu 200 kg und diese, wie das Oszillogramm zeigt, schwingt nicht ganz plötzlich, sondern in einer immerhin nicht unbeträchtlichen Zeit aus. Auch die Magnetisierung braucht Zeit —, so daß es nicht gelang, mehr als 4 kräftige Einzelschläge mit einem solchen Induktorium pro Sekunde zu erzielen.

Es mußte deshalb die Bewegungsaufnahme so gemacht werden, daß von 12 Herzperioden, die unter Kontrolle des Sphygmographen als untereinander gleich betrachtet werden konnten, je eine, immer um $^1/_{12}''$ spätere Phase dargestellt wurde. Diese, nacheinander im Kinematographen betrachtet, ergeben ein hinreichendes Bild des Herzschlages.

Ich will nur noch kurz erwähnen, daß die Methodik der Aufnahmen folgende war: Jedesmal im höchsten Punkte des Sphygmographenausschlages, also in einer Zeit, die der tiefsten Kontraktion des Herzens $+ t_1$ entsprach, schloß der Zeiger einen sehr feinen Kontakt, der seinerseits ein Relais in Tätigkeit setzte, das den Induktorstromkreis einschaltete. Darauf erfolgt die automatische Unterbrechung des Stromkreises durch die Patrone, wie dies in der zitierten Arbeit beschrieben ist.

Das Relais besaß eine Verspätungseinrichtung, die gestattete, die Zeit, welche zwischen dem Sphygmographenkontakt und der primären Stromeinschaltung verfloß, jeweils um $^1/_{12}''$ zu vergrößern.

Wird die Amplitude der Kontraktion des Herzens, von der wir ausgingen, als Anfangspunkt genommen, so erreicht der erste Schlag eine Herzphase, die gegeben ist durch

$$\tau_1 = o + t_1 + t_k + t_0,$$

wo t_k die konstante Verspätung des Systemes, also die Zeit ist, die vom Sphygmographkontakt bis zum Aufleuchten der Röhre verstreicht. Diese setzt sich eigentlich auch aus 2 Konstanten zusammen, der konstanten Relaisverspätung und der Verspätung im Induktorium. Die Größe t_0 ist die oben erwähnte künstliche Verspätung, die also im ersten Falle $= o$ war.

Die zweite Aufnahme erfolgte sodann an der Stelle der Herzkurve

$$\tau_2 = o + t_1 + t_k + {}^1/_{12}'',$$

die folgende

$$\tau_3 = o + t_1 + t_k + {}^2/_{12}''.$$

Da nun die Summe $\tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n = 0{,}8''$, der Dauer eines ganzen Herzschlages sein sollte, so mußten wir bereits von vornherein erwarten, daß etwa beim 10. Schlage die Aufnahme zu Ende sein werde, was dann auch eintraf. Physikalisch interessant war an der Versuchsreihe[1]), außer der nicht ausgeführten Bestimmung von t_1, die Messung der Verspätung von Relais und Induktionsspule und die Messung der vom Induktorium sekundär gelieferten Stromstärke.

Die Verspätung wurde auf Eijkmans Vorschlag in folgender Weise bestimmt:

Auf einer Trommel, die um eine Vertikalachse rotierte, waren übereinander zwei Messungsstreifen aufgezogen. Unten ein Film, in schwarzes Papier gehüllt, darüber das übliche berußte Papier. Durch eingesteckte feine Metallnadeln wurden das sichere Aufeinanderlagern und die spätere Möglichkeit, korrespondierende Punkte zu finden, gesichert.

Auf dem berußten Papier schrieb erstens eine elektrisch angetriebene Stimmgabel von bekannter Schwingungsdauer, zweitens ein mit dem Vorkontakt des Relais fest verbundener Zeiger. Vor der Trommel stand endlich eine Bleiwand mit Spalt, durch den hindurch die X-Strahlung der Röhre auf den Film fiel.

Dadurch wurde bekannt: A. der Augenblick, in welchem der Vorkontakt des Relais (durch den Sphygmographenhebel) geschlossen wurde. Dieser Augenblick war ablesbar aus der Zeigerbewegung. B. Der Augenblick des Aufleuchtens der Röhre. C. Die Anzahl der Schwingungen, welche die Stimmgabel zwischen A und B vollendet hatte und damit die Zeit. Die Streifen wurden in der üblichen Weise unter dem Vergrößerungsglas ausgemessen und die Verspätung als $^1/_{10}''$ gefunden.

Bei dieser verhältnismässig so geringen Verspätung t_k konnte die Schwankung t_1 als geringfügig angenommen werden. Denn offenbar ist die Variable t_1 Funktion der Konstanten t_k und der Blutgeschwindigkeit, und zwar wächst ihre Größe mit t_k, während sie mit der Blutgeschwindigkeit abnimmt. Da nun t_k nur $^1/_{10}''$, die Variation der Blutgeschwindigkeit in dem elastischen Arteriensystem kaum größer als 10 Proz., so dürfte die Fehlergröße in t_1 bei $^1/_{100}''$ liegen.

Schwierig erscheint auf den ersten Blick die Messung der Stromstärke, die der verwendete große Induktor liefert. Denn der ca. $^1/_{100}''$ dauernde Stromstoß ergibt einen ballistischen Ausschlag, der natürlich sehr von der Trägheit des Meßsystemes und dessen Dämpfung abhängt. So ergaben verschiedene Instrumente für gleiche Schläge um mehrere 100 Proz. diffe-

1) Das Herzkinematogramm, das Eijkman und ich so gewonnen, führte ich auf dem Salzburger Naturforscherkongresse 1909 in der medizin. Sektion vor. (Siehe Verhandl.)

rierende Angaben. Von den Wegen, die zur Messung führen, schienen mir folgende beiden gangbar. Entweder die empirische Eichung einer Gehrckeschen Oszillographenröhre oder der folgende, den ich mit guten Erfolge benutzte:

Ein Milliamperemeter mit einer durch Torsionsfedern hergestellten Nulleinstellung wurde mit konstantem Strom empirisch bis 250 Milliampere geeicht. An diesem Milliamperemeter wurde eine Vorrichtung angebracht, durch die der Zeiger von der Nullstellung aus vorgeschoben werden konnte. Da bei einem solchen Instrument die Einstellung des Zeigers dann erfolgt, wenn das magnetische Drehmoment und das Rückdrehmoment der Feder gleich sind, so schlägt der beispielsweise auf 100 Milliampere geschobene Zeiger nur dann aus, wenn der Strom 100 Milliampere übersteigt. Auf diese Weise fand ich für die Einzelfunken des Induktoriums sekundäre Stromstärken von > 200 Milliampere, also 0,2 Ampere bei 35 bis 45 cm frei durchschlagener Luft, gewiß eine Leistung, die bisher wohl kaum ein Induktorium gegeben hat. —

II.

Ein anderes medizinisches Problem führte mich zu Untersuchungen über die Entladungspausen, die zweckmäßigerweise beim Betriebe von Röntgenröhren zwischen zwei Entladungsschlägen eingehalten werden sollen. Das medizinische Problem ist die Frage, wie unter größter Schonung der Röhre die höchstmögliche Belastung, d. h. also Röntgenstrahlenerzeugung auf die Dauer erzielt werden könnte. Diese Frage ist insbesondere bei der therapeutischen Benutzung der X-Strahlen bei Hautkrankheiten und Geschwüren von Wichtigkeit.

Beim Durchgang eines Stromstoßes durch die X-Strahlenröhre entsteht wahrscheinlich keine einheitliche Strahlung, sondern ein Strahlengemisch, das härtere und weichere Strahlen enthält. Nach den Untersuchungen von Klingelfuß und eigenen diesbezüglichen Versuchen geht der Induktionsstoß so durch die Röhre, daß zunächst die Spannung an den Röhrenelektroden rasch ansteigt, bis der Durchbruch erfolgt und daß diesem Spannungsvorstoße sodann bei sinkender Spannung ein Intensitätsnachschub folgt, bis die Spannung so tief gesunken ist, daß der Abbruch der Entladung erfolgt. — Dem Spannungsvorstoß entspricht eine schnellere Kathoden- und härtere X-Strahlung, dem Intensitätsnachschub bei sinkender Spannung eine allmählich weicher werdende Strahlung. Für diese Auffassung des Vorganges spricht besonders folgender Versuch: Schaltet man dem Entladungsrohre eine Funkenstrecke vor, so erfolgt der Abbruch der Entladung natürlich viel früher. Es geht also nur der erste höhergespannte Entladungsteil durch die Röhre. Tatsächlich sendet die Röhre bei Vorschaltung einer Funkenstrecke eine Strahlung von wesentlich härterem Gesamtcharakter aus, als ohne diese.

Sehr verschieden ist nun nach meinen Beobachtungen der Zustand einer Röhre unmittelbar vor und unmittelbar nach einer Entladung. Unmittelbar nach der Entladung ist der Gasinhalt der Röhre wesentlich leitungsfähiger als vorher und es dauert eine zur Dauer des Stromdurchganges verhältnismäßig sehr lange Zeit, bis die Röhre zum Stadium des Anfanges zurückkehrt. Man kann sagen, daß die Röhre bei Betrieb mit Unterbrechern und Funkeninduktoren nach jedem Durchgang eines Induktionsschlages einer gewissen Erholungspause bedarf, um zu ihrem ursprünglichen Widerstand zurückzukehren. Es war mir nun ferner leicht, die Abhängigkeit dieser Pause von der Intensität des vorangegangenen Induktionsschlages nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke wurde der in dieser Zeitschr. **10**, 674—678, 1909, an letzter Stelle beschriebene Unterbrecher mit verschieden breiten Kontakten versehen und bei gleichbleibender Tourenzahl und sonst gleichen Verhältnissen mit einem Induktorium und einer mittelweichen gegen den Eintritt verkehrter Impulse nicht besonders geschützten Röhre zusammen betrieben. Im sekundären Kreise war der Röntgenröhre eine Gehrckesche Oszillographenröhre vorgeschaltet. Bei der durch die Bauart des Induktoriums und der üblichen Einschaltung eines Kondensators über die Unterbrecherpole vorhandenen Differenz in der Spannung der sekundären Schließungs- und Öffnungsinduktion war zunächst Schließungsinduktion nicht bemerkbar. Sie trat aber sofort und zwar deutlich auf, wenn die Kontakte so angeordnet waren, daß bei erfolgter Unterbrechung nach sehr kurzer Zeit wieder Stromschluß erfolgte. Offenbar war dann, wie oben gesagt, die Röhre von der voraufgegangenen Öffnungsinduktion noch erweicht, als schon die nächste Schließungsspannung einsetzte, die „Erholungspause“ war zu gering.

Sehr leicht ist dann durch Veränderung der zugeführten Stromstärke zu zeigen, daß die Pausen vergrößert werden müssen, wenn der vorhergehende Öffnungsschlag verstärkt wird.

Dieselbe Versuchsreihe ließ sich auch mit Wehneltunterbrechern durchführen, indem man einerseits die Eintauchtiefe bei möglichster Wahrung der sonstigen Verhältnisse im Stromkreis, andererseits die Unterbrechungszahl bei gegebener

Eintauchtiefe der Anode durch regelbare Selbstinduktionswiderstände im Primärkreis veränderte.

Das Verhältnis der Stromdurchgangszeit und der notwendigen Pause ließ sich aus meinen Versuchen nicht eindeutig bestimmen. Es scheint, abgesehen von der soeben genannten Beziehung, sehr von der Röhre selbst abzuhängen. Einige Male fand ich Werte von 1:10, das heißt also, es ging die Röhre schließungsfrei (bei ziemlich kräftigen Entladungsschlägen), solange die Pause zwischen zwei Schlägen 10 mal so lange war, als die Dauer des Durchganges selbst.

Jedenfalls ergab sich als ökonomischste Methode des Betriebes an Röntgenröhren, um bei möglichster Konstanz des Strahlungscharakters und geringster Erwärmung große Strahlenmengen aus ihr zu entnehmen, der Betrieb mit kräftigen durch verhältnismäßig lange Pausen getrennten Einzelschlägen. Die Schlagzahl pro Sekunde hängt natürlich ganz von den Umständen ab, — bei harten Röhren und geringen Intensitäten ist sie größer als bei weichen Röhren und großen Intensitäten. 2 bis 40 in der Sekunde stellen die Grenzen meiner Beobachtungen dar.

Anschließend daran machte ich Versuche über die Abhängigkeit der bei der Entwicklung einer gewissen X-Strahlung auf der Antikathode abgegebenen Wärme bei rascher und langsamer Schlagfolge. Hierbei wurden Müllersche Röhren benutzt, bei denen die Antikathode ein Wassergefäß mit Platinboden bildet und die sich deshalb sehr gut zu solchen Bestimmungen eignen. Zur Messung der von der Röhre abgegebenen Strahlung bediente ich mich des bekannten Verfahrens von Kienboeck, der Belichtung von unempfindlichem Chlorbromsilberpapier. Das Ergebnis war, daß zur Erzeugung einer bestimmten Verfärbung des Kienboeckschen Meßpapieres in kuzer Zeit wesentlich weniger Wärme auf der Antikathode abgegeben wurde, wenn der Betrieb mit langsamen, kräftigen Einzelschlägen erfolgte, wie, wenn die sekundäre Schlagzahl größer, die Intensität der einzelnen im Verhältnis geringer war. —

Diese Versuche, die auch eines gewissen physikalischen Interesses nicht entbehren, führten zu medizinisch wichtigen Ergebnissen, nämlich zur Konstruktion von therapeutischen Röntgeninstrumentarien, bei denen sich die Schlagzahl pro Sekunde aufs feinste abstufen läßt und bei denen die Röhre bei völlig konstanter Strahlungsqualität unter relativ hoher Belastung sehr lange eingeschaltet werden kann.

(Eingegangen 25. November 1910.)

VORTRÄGE UND REDEN.

Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe[1]).

Von F. Klein.

Sie haben alle in mehr oder minder bestimmter Form davon gehört, daß sich die Theorie der Lorentzgruppe oder, was dasselbe ist, das moderne Relativitätsprinzip der Physiker in die allgemeine Lehre von der projektiven Maßbestimmung einordnet, wie sich diese im Anschluß an Cayleys grundlegende Arbeit von 1859 entwickelt hat. Es entsprach noch einer Verabredung mit unserem verstorbenen Freunde Minkowski, daß ich diese Sachlage im verflossenen Wintersemester in meiner Vorlesung über projektive Geometrie des näheren ausführte, bezw. als das abschließende Ergebnis meiner Vorlesung hervortreten ließ. Die Lehre von der projektiven Maßbestimmung, die schon nach so manchen Seiten hin grundlegend geworden ist, gewinnt hier eine neue und überraschende Anwendung, während sich andererseits die modernen Entwickelungen der Physiker, die dem Neuling so leicht den Eindruck des Paradoxen machen, sozusagen als Korollare eines allgemeinen seit lange wohlgeordneten Gedankenganges erweisen. Es kann nicht fehlen, daß dieses Zusammentreffen zweier nach ihrer historischen Entstehung gänzlich getrennter Gedankenkreise nach beiden Seiten hin in hohem Maße anregend wirken muß; ich hoffe um so mehr auf einiges Interesse hierfür gerade auch seitens der Physiker, als die Geometer schon mancherlei Einzelresultate herausgearbeitet haben, die sich in der Werkstätte der theoretischen Physik nunmehr als willkommene Hilfsmittel bewähren möchten.

Wenn ich nun heute unternehme, Ihnen das Gesagte nach seinen wesentlichen Grundlinien näher auszuführen, so stehe ich allerdings vor einer großen Schwierigkeit: ich werde nicht umhin können, den Gruppenbegriff sowie gewisse fundamentale Begriffsbildungen der projektiven Geometrie, wie homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten, die den linearen

1) Vortrag, gehalten in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom 10. Mai 1910; siehe auch Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Sept. Okt. 1910.

Substitutionen dieser Koordinaten entsprechenden Kollineationen, endlich für jede aus Kollineationen gebildete Gruppe das Vorhandensein einer zugehörigen Invariantentheorie, dies alles wohlverstanden für Gebiete von beliebig viel Dimensionen — als geläufig vorauszusetzen, während ich doch recht gut weiß, daß nicht nur die zahlreich anwesenden Physiker, die ich hier als Gäste besonders willkommen heiße, sondern auch die Mehrzahl der jüngeren Fachmathematiker, die unserer Gesellschaft angehören, sich mit diesen Dingen sozusagen nur par distance beschäftigt haben. Viele von Ihnen sind bisher zweifellos der Meinung gewesen, daß die projektive Geometrie, nachdem sie solange im Vordergrunde der mathematischen Produktion stand, heute doch nur die Bedeutung einer mathematischen Spezialdisziplin beanspruchen könne. Da ist es ja an sich sehr nützlich, daß mein heutiger Vortrag der entgegengesetzten Auffassung Ausdruck geben muß, daß nämlich die projektive Geometrie im Rahmen der von uns allen anzustrebenden mathematischen Gesamtbildung als gleichwertig anzusehen sei mit anderen grundlegenden Fächern, wie etwa Algebra oder Funktionentheorie. Aber dieses ideale Moment kann doch die Schwierigkeit, die sich aus dem tatsächlichen Fehlen ausreichender Vorkenntnisse ergibt, nicht aus der Welt schaffen. Ich greife also zu der Methode, die unter derartigen Umständen noch am ehesten einen Erfolg verspricht, daß ich Ihnen die Dinge nach ihrem historischen Werdegang vorführe, und muß Sie übrigens bitten, daß Sie dabei die Lebhaftigkeit, mit der ich von der Wichtigkeit des projektiven Denkens spreche, als ein Äquivalent für die fehlende Ausführlichkeit in den Einzelangaben hinnehmen.

Ich beginne, dem Gesagten entsprechend, damit, daß ich Ihnen Cayleys Originalarbeit von 1859 vorlege, die sechste einer Reihe von Abhandlungen, in denen Cayley damals seine Auffassungen und Kenntnisse auf dem Gebiete der Invariantentheorie linearer Substitutionen zusammengefaßt hat (a sixth memoir upon Quantics, Bd. 149 der Philosoph. Transactions d. R. Society, — Bd. II der Werke, S. 561 ff.). Beim Durchblättern werden Sie zunächst keinen besonderen Eindruck haben, weil vor allen Dingen Einzelheiten über quadratische Formen entwickelt werden; es ist aber doch einfach, die Fragestellung und ihre glänzende Beantwortung herauszuheben. Die Entwicklung der Geometrie in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hatte dahin geführt, den Gesamtinhalt der Raumlehre in zwei verschiedene Gebiete zu sondern: die Geometrie der Lage (deskriptive Geometrie), die von solchen Eigenschaften der Figuren handelt, welche bei beliebigem Projizieren ungeändert erhalten bleiben, und die Geometrie des Maßes, deren Grundbegriffe (Abstand, Winkel usw.) diese Invarianz keineswegs besitzen. Diese Trennung hatte sich im Bewußtsein der damaligen Mathematiker festgesetzt, trotzdem bereits Poncelet die entscheidende Bemerkung gemacht hatte, daß, für eine allgemeine Auffassung, die Kreise der Ebene und die Kugeln des Raumes — also die Hauptobjekte der metrischen Betrachtung — als Kegelschnitte, bzw. Flächen zweiten Grades angesehen werden können, die mit dem Unendlich-Weiten der Ebene, bzw. des Raumes ein bestimmtes durch eine Gleichung zweiten Grades gegebenes, imaginäres Gebilde gemein haben, — die sogenannten Kreispunkte der Ebene, bzw. den Kugelkreis des Raumes. Nun ist Cayleys Leistung, erkannt zu haben, daß in diesen Ponceletschen Aussagen das Mittel gegeben ist, die genannte Trennung der Geometrie in zweierlei einander fremde Disziplinen wieder rückgängig zu machen, oder vielmehr sie durch eine prinzipiell andere Auffassung zu ersetzen. Sein Resultat ist — wie alle grundlegenden Gedanken der mathematischen Wissenschaft — äußerst einfach: alle Maßbeziehungen geometrischer Figuren können ohne weiteres als projektive Beziehungen aufgefaßt werden, sofern man den Figuren — je nachdem sie eben oder räumlich sind — die Kreispunkte bzw. den Kugelkreis hinzufügt; die Maßgeometrie erscheint so als dasjenige Stück der projektiven Geometrie, das von Figuren handelt, bei denen das Paar der Kreispunkte, bzw. der Kugelkreis beteiligt ist.

Diese Aussage wird sehr viel deutlicher werden, wenn ich einige einfachste Formeln schreibe.

Zunächst nur in der Ebene. Seien x, y gewöhnliche rechtwinkelige Punktkoordinaten. Wir setzen, homogen machend,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3};$$

wir nennen ferner u_1, u_2, u_3 die homogenen Koordinaten der durch die Gleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ dargestellten geraden Linie. Das Kreispunktepaar ist dann in Punktkoordinaten durch die Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen

$$x_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (1)$$

gegeben, in Linienkoordinaten aber als Umhüllungsgebilde aller Geraden, welche die eine Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 = 0 \qquad (2)$$

erfüllen. — Man beachte nun, um bei dem Einfachsten zu bleiben, die Formel für die Entfernung zweier Punkte

$$r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}.$$

Wir schreiben, homogen machend:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad \bar{x} = \frac{y_1}{y_3}, \quad \bar{y} = \frac{y_2}{y_3}$$

und erhalten:

$$r = \frac{\sqrt{(x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2}}{x_3 y_3}. \quad (3)$$

Hier verschwindet der Zähler, wenn die beiden gegebenen Punkte mit einem der Kreispunkte auf gerader Linie liegen, der Nenner, wenn einer der gegebenen Punkte auf der Verbindungslinie der beiden Kreispunkte liegt. Beides sind projektive Eigenschaften der von den gegebenen zwei Punkten und den Kreispunkten gebildeten Gesamtfigur! Algebraisch aber folgt hieraus (wie ich unmöglich näher ausführen kann), daß der Ausdruck r sich nur um einen konstanten Faktor ändert, wenn man unsere vier Punkte gleichzeitig einer beliebigen Kollineation unterwirft. Deshalb nennt man r eine Invariante unserer vier Punkte gegenüber der Gesamtheit aller Kollineationen, oder auch eine „simultane Invariante" der zwei zunächst gegebenen Punkte und der in (1) bzw. (2) linker Hand stehenden algebraischen Formen. Der Inhalt der projektiven Geometrie der Ebene ist aber, algebraisch zu reden, nichts anderes, als die Lehre von den Invarianten, welche irgendwelche ebene Figuren gegenüber der Gesamtheit der ebenen Kollineationen besitzen, insbesondere auch von den Relationen, welche solche Invarianten untereinander aufweisen mögen; es ordnen sich also alle Sätze, die zwischen den Entfernungen irgendwelcher Punkte der Ebene bestehen mögen, in die projektive Geometrie ein. —

Im Raume ist die Sache nur durch die vermehrte Zahl der Koordinaten komplizierter. Seien x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten, so setzen wir, homogen machend,

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Der „Kugelkreis" ist dann in Punktkoordinaten durch das Gleichungspaar

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (4)$$

gegeben, in zugehörigen Ebenenkoordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) aber durch die eine Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0. \quad (5)$$

Man betrachte wieder den Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte. Indem wir letzteren die homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ und $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ erteilen, erhalten wir

$$r = \frac{\sqrt{(x_1 y_4 - y_1 x_4)^2 + (x_2 y_4 - y_2 x_4)^2 + (x_3 y_4 - y_3 x_4)^2}}{x_4 y_4} \quad (6)$$

und knüpfen an diese Formel Erörterungen, die den soeben an (3) angeschlossenen ganz ähnlich sind. —

Die vorstehenden Andeutungen werden genügen, um den Sinn von Cayleys grundlegender Arbeit einigermaßen verständlich zu machen. Ich darf nun einen Augenblick von den Überlegungen reden, die ich in meinem Erlanger Antrittsprogramm 1872 entwickelt habe[1]). Bei Cayley ist immer nur von Invarianten gegenüber der Gesamtheit der Kollineationen des gerade in Betracht kommenden Gebietes die Rede. Demgegenüber betonte ich damals, daß man ebensowohl von Invarianten gegenüber einer Untergruppe von Kollineationen reden könne. Von hier aus ergab sich eine neue Beleuchtung des Wesens der metrischen Geometrie und der hierauf bezüglichen Cayleyschen Auffassung. Es ist eine triviale Bemerkung, daß alle Aussagen der metrischen Geometrie unabhängig von der Lage und von der absoluten Größe der Figuren bestehen und eben hierdurch gegenüber den Aussagen individuellen Inhaltes, wie man sie in der Topographie aufstellt, charakterisiert werden können. Man wird dies modern-mathematisch in der Weise ausdrücken, daß man zunächst zwei nahe miteinander verwandte Gruppen kollinearer Umformungen einführt: die Gruppe der Bewegungen und die umfassendere Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen (die Gruppe der „kongruenten" und die Gruppe der „äquiformen" Transformationen nach der von Heffter und Koehler in ihrem Lehrbuch eingeführten Ausdrucksweise[1])), und nun sagt: die metrischen Eigenschaften sind dadurch charakterisiert, daß sie relativ zu diesen Gruppen invariant sind. Wir haben danach: Metrische Geometrie und projektive Geometrie kommen beide auf das Studium einer Invariantentheorie heraus, und ihre gegenseitige Beziehung liegt darin, daß die Gruppe der metrischen Geometrie eine Untergruppe der zur projektiven Geometrie gehörigen Gruppe ist.

1) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", abgedruckt in Band 43 der Mathematischen Annalen und anderswo.

1) Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I Leipzig 1905.

Ein paar einfache Formeln werden diesen Sachverhalt verdeutlichen und noch weiter gliedern. Wir mögen in der Ebene bleiben und der Einfachheit halber gewöhnliche (nicht homogene) rechtwinklige Koordinaten x, y gebrauchen. Schreiben wir dann

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

und betrachten hier die $a_{11} \ldots a_{23}$ als beliebig veränderliche Größen, so haben wir die sechsparametrige Gruppe der sogenannten affinen Transformation vor uns. Aus ihr entsteht die vierparametrige Gruppe der äquiformen Transformationen, wenn man verlangt, daß $dx'^2 + dy'^2$ bis auf einen Faktor mit $dx^2 + dy^2$ übereinstimme. Es ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned}$$

wenn also die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

wie man sagt, orthogonal ist. Die dreiparametrige Gruppe der kongruenten Transformationen aber entsteht, wenn man die Matrix überdies unimodular nimmt, d. h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

gleich **1** setzt. Es wird dann

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2.$$

Wir schreiben endlich die allgemeinsten Kollineationen an der Ebene:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Man erkennt nun ohne Mühe:

Die Gruppe der affinen Transformationen (7) besteht aus denjenigen Kollineationen, welche eine bestimmte gerade Linie, nämlich die unendlich ferne Gerade, in sich transformieren.

Die Gruppe der äquiformen Transformationen aber besteht aus den Kollineationen, welche ein bestimmtes auf dieser geraden Linie liegendes Punktepaar, eben das Kreispunktepaar, ungeändert lassen.

Geometrisch nicht ganz so einfach ist die Definition der Gruppe der kongruenten Transformationen. Wir begnügen uns hier mit der algebraischen Charakterisierung: es sind die äquiformen Transformationen, deren vorbezeichnete Determinante gleich **1** ist. Die äquiformen Transformationen sind natürlich eo ipso affin.

Soll ich einfügen, daß man nun — als Mittelglied zwischen projektiver Geometrie und metrischer Geometrie — eine affine Geometrie definieren kann, welche alle diejenigen Eigenschaften ebener Figuren behandelt, die bei der Gruppe (7) invariant sind? Wir hätten dann dreierlei Geometrien zu vergleichen, von denen projektive und metrische Geometrie die beiden extremen Fälle sind. Die Systematik würde dadurch gewinnen, die Darstellung aber unnötig schleppend werden, weil mehreremal im Grunde dasselbe zu sagen wäre. So soll also weiterhin in der Hauptsache doch nur von projektiver und metrischer Geometrie die Rede sein und der affinen Geometrie, die allerdings zum Schluß besonders hervortreten wird, nur beiläufig gedacht werden. —

In diesem Sinne unterscheide ich also nur zwischen der elementaren (direkten) Behandlung der metrischen Beziehungen und der durch Cayley angebahnten projektiven. Und dieser Unterschied formuliert sich (im Sinne des Erlanger Programms) dahin: „Die projektive (höhere) Behandlung sucht die invarianten Beziehungen, welche die vorzugebenden Figuren nach Hinzufügung der Kreispunkte gegenüber der Gesamtheit der Kollineationen besitzen; die elementare Behandlung die invarianten Beziehungen, welche die Figuren als solche gegenüber der engeren Gruppe derjenigen (äquiformen oder kongruenten) Kollineationen besitzen, welche die Kreispunkte in sich überführen."

Nun bin ich mit diesen allgemeinen Vorbetrachtungen zu Ende und ich bitte Sie nur, insbesondere folgenden Gedanken festzuhalten: Invariantentheorie ist ein relativer Begriff; man kann gegenüber jeder Gruppe von Transformationen von einer zugehörigen Invariantentheorie sprechen. Dieser Gedanke ist so natürlich, daß er in den verschiedensten Anwendungsgebieten und so auch in der theoretischen Physik überall spontan hervortritt. Die Terminologie, durch die er zum Ausdruck gebracht wird, ist natürlich je nach den Gebieten eine sehr verschiedene. Denn die Forscher verschiedener Art, und so auch die Physiker, haben bei ihren Arbeiten nicht die Zeit und vielfach auch nicht die Gelegenheit, nachzusehen, ob irgendwelche begriffliche Ansätze, deren sie bedürfen, sich in den Vorratskammern der reinen Mathematik bereits fertig ausgebildet vorfinden, sie verfahren daher so — und es bringt dies eine gewisse Frische ihrer Gedankengänge mit sich —, daß sie sich die mathematischen Instrumente, deren sie bedürfen, von Fall zu Fall selbst anfertigen. Die spätere Verständigung mit den zünftigen Mathema-

tikern, die mir allerdings eine wichtige Sache zu sein scheint, weil sie die Gedanken präzisiert und allerlei Zusammenhänge aufdeckt, verlangt dann vor allen Dingen eine Übersetzung der hier und dort gebrauchten Ausdrucksweisen in die Sprache des anderen. So will ich hier vorgreifend den Satz aussprechen:

„Was die modernen Physiker Relativitätstheorie nennen, ist die Invariantentheorie des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes x, y, z, t (der Minkowskischen „Welt") gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kollineationen, eben der „Lorentzgruppe"; — oder allgemeiner, und nach der anderen Seite gewandt:

„Man könnte, wenn man Wert darauf legen will, den Namen „Invariantentheorie relativ zu einer Gruppe von Transformationen" sehr wohl durch das Wort Relativitätstheorie bezüglich einer Gruppe ersetzen".

Ich bemerke nunmehr einiges betreffend die rein mathematischen Untersuchungen, die sich s. Z. an Cayleys Abhandlung anschlossen. Das ist in der Tat die historische Stellung dieser hervorragenden Arbeit, daß sie nicht nur das alte Problem von der Beziehung zwischen metrischer Geometrie und projektiver Geometrie entscheidend beantwortete, sondern damit zugleich eine neue Fragestellung, die nach den verschiedensten Richtungen folgenreich werden sollte, in den Vordergrund brachte. Die metrische Geometrie erwächst aus der projektiven, wenn man die Kreispunkte, gegeben durch die Gleichung $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (oder, im Raume, den Kugelkreis, gegeben durch die Gleichung $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$) hinzunimmt. Was wird geschehen, wenn man statt dessen irgendeine Gleichung zweiten Grades $\Sigma\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ in sinngemäßer Weise zugrunde legt?

Bleiben wir bei der Ebene, wo unsere neue Gleichung irgendeine Kurve zweiter Klasse vorstellt. Für den projektiven Geometer zerfallen diese Kurven in fünf verschiedene Arten, die ich hier aufzähle, indem ich mir statt des seither benutzten rechtwinkligen Parallelkoordinatensystems jeweils ein geeignetes Dreieckkoordinatensystem (dessen „Linienkoordinaten" ebenfalls $u_1 : u_2 : u_3$ genannt werden) zugrunde gelegt denke. Die Liste ist folgende:

A. Eigentliche Kegelschnitte.
1. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, imaginärer Kegelschnitt,
2. $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$, reeller Kegelschnitt.

B. Punktepaare.
3. $u_1^2 + u_2^2 = 0$, imaginäres Punktepaar (übereinstimmend mit der Gleichung (2) der Kreispunkte),
4. $u_1^2 - u_2^2 = 0$, reelles Punktepaar.

C. Einzelner Punkt, doppeltzählend.
5. $u_1^2 = 0$.

— Das Prinzip dieser Aufzählung ist so einfach, daß jedermann die entsprechende Tabelle nach Analogie gleich für n Veränderliche $u_1 \ldots u_n$ hinschreiben wird: zuerst Gleichungen mit n Quadraten, die wechselnd mit + oder — aneinandergefügt werden, dann solche mit $(n-1)$ Quadraten usw. Die Fälle der ersten Kategorie sollen die allgemeinen heißen, die nachfolgenden einfach spezialisiert, die der dritten Kategorie doppelt spezialisiert, usw.

Für jeden dieser Fälle konstruieren wir nun ein Analogon zur Formel (3) für die Entfernung zweier Punkte und erhalten, was Cayley die zugehörige Quasientfernung nannte. Für den Fall des imaginären Punktepaares werden wir einfach die Formel (3) beibehalten (nur daß jetzt $x_1 : x_2 : x_3$ und $y_1 : y_2 : y_3$ nicht notwendig rechtwinklige Parallelkoordinaten, sondern allgemein zu reden zugehörige Dreieckskoordinaten sein werden). In den folgenden beiden Fällen (des reellen Punktepaares und des Doppelpunktes) werden kleine Änderungen anzubringen sein, auf die wir sogleich noch zurückkommen. Schwieriger ergibt sich der geeignete Ansatz für die Quasientfernung in den vorangehenden beiden Fällen (der eigentlichen Kegelschnitte); wir wollen hier darauf nicht näher eingehen, weil es zu viel Raum beanspruchen würde und nach seinen Einzelheiten für den heutigen Vortrag doch nicht in Betracht kommt. Das Resultat ist jedenfalls dieses, daß wir fünf Arten (und nur fünf Arten) Maßgeometrie in der Ebene erhalten, von denen uns nur die eine, die dem imaginären Punktepaar entspricht, von dem Beispiel der elementaren Metrik her bekannt ist. Den Inbegriff aber der so entstehenden Theorien nennen wir die allgemeine Lehre von der projektiven Maßbestimmung (zunächst für die Ebene, dann für den Raum, überhaupt für beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.)

Nun kann ja heute keineswegs meine Absicht sein, in die Einzelheiten dieser Theorien einzugehen; nur ihre allgemeine Bedeutung soll hervorgehoben werden. Ich habe da zunächst ein Vorurteil, das mancher hegen mag, zurückzuweisen: der Laie wird von vornherein sehr wenig geneigt sein, der Beschäftigung mit Fragestellungen, die zunächst nur aus dem subjektiven, sozusagen ästhetischen Erkenntnistrieb des Mathematikers hervorgehen, irgendwelchen Wert beizulegen. Die Geschichte der Wissenschaft aber zeigt, daß die Sache ganz anders

liegt; es ist ein großes Geheimnis und schwer in bestimmte Worte zu fassen; ich werde sagen, daß alles, was mathematisch gesund ist, früher oder später über sein engeres Gebiet hinaus eine weiterreichende Bedeutung gewinnt. So ging es mit der Theorie der Kegelschnitte, die von den Geometern des Altertums um ihrer selbst willen entwickelt war und mit der Entdeckung der Keplerschen Gesetze plötzlich die größte Wichtigkeit für unser Naturverständnis gewann. Und genau so ging es mit der an die Theorie der Kegelschnitte sich unmittelbar anlehnenden Lehre von der projektiven Maßbestimmung. Das erste war, daß sie hohe erkenntnistheoretische Bedeutung erhielt, indem sie sich als die einfachste Grundlage für die Nicht-Euklidischen Geometrien erwies, die aus den Untersuchungen über die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den anderen Axiomen entstanden waren und zunächst als etwas besonders schwer Zugängliches galten[1]); ich werde sogleich noch einige hierauf bezügliche Einzelheiten anführen. Das zweite war, daß sie sich in anderen Gebieten der reinen Mathematik als eine brauchbare Methode zur Klarstellung komplizierter Verhältnisse bewährte, so in der Theorie der automorphen Funktionen oder auch in der Zahlentheorie[2]). Und nun, in den letzten Jahren, kommt hervor, daß sie ebensowohl eine rationelle Grundlage für die modernsten Spekulationen der Physik abgibt, insbesondere den Gegensatz zwischen klassischer und neuer Mechanik einfach begreifen läßt.

Die Beziehung zwischen projektiver Maßbestimmung und Parallelentheorie, auf die ich Bezug nahm, läßt sich, wenn wir uns wieder auf die Ebene beschränken, ihrem äußeren Ergebnisse nach dahin fassen, daß wir im Falle 1 der auf S. 21 aufgestellten Tabelle (also bei Zugrundelegung eines imaginären Kegelschnitts) die Nicht-Euklidische Geometrie von Riemann erhalten, im Falle 2 aber (d. h. bei Zugrundelegung eines reellen Kegelschnitts) die Nicht-Euklidische Geometrie von Bolyai-Lobatscheffsky-Gauß. Ich möchte einen besonderen Punkt erwähnen, der infolge der projektiven Auffassung ohne weiteres klar ist, während er sonst leicht von dem Schimmer des Mystischen umgeben scheint: Die Zahl der Kollineationen, durch welche ein nicht zerfallender Kegelschnitt in sich transformiert wird, ist ∞^3, sie steigt auf ∞^4, sobald der Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet. Hierin liegt, daß die aus den Elementen uns so geläufigen äquiformen Transformationen (Ähnlichkeitstransformationen) der Euklidischen Metrik in den Nicht-Euklidischen Geometrien als besondere Kategorie in Wegfall kommen; es bleiben nur die ∞^3 kongruenten Transformationen (Bewegungen). Die Folge ist, daß es in den Nicht-Euklidischen Geometrien ein absolutes Längenmaß gibt, nicht nur, wie bei Euklid, ein absolutes Winkelmaß. Übrigens haben die beiden Gruppen, die G_3 der einen oder anderen Nicht-Euklidischen Geometrie und die G_4 der Euklidischen Geometrie, ihrer inneren Struktur nach wenig miteinander zu tun. Eben darum ist es so schwer, vom Standpunkte der Euklidischen Geometrie aus die Nicht-Euklidische zu verstehen: eine Figur, die sich Nicht-Euklidisch bewegt, erleidet, Euklidisch betrachtet, seltsame Verzerrungen. Alle Schwierigkeit verschwindet aber, sobald ich mich an das allgemeine projektive Denken gewöhnt habe. In der Tat schließt die G_8 der projektiven Geometrie (d. h. die Gesamtheit aller Kollineationen der Ebene) ebensowohl die G_3 der einen oder anderen Nicht-Euklidischen Geometrie wie die G_4 der Euklidischen Geometrie ein. Verfüge ich über die projektive Auffassung, so habe ich denselben Vorteil, wie ein Wanderer, der auf einem Berge stehend in verschiedene Täler gleichzeitig hinabblickt, während er vorher, im einzelnen Tale stehend, sich von dem Verlauf der anderen Täler nur schwer eine Vorstellung machen konnte. Noch ein letzter, nicht unwichtiger Punkt! Bei aller prinzipiellen Verschiedenheit der Fälle 1, 2, und 3 ist es für den Projektiviker doch so gut wie selbstverständlich, daß man zwischen den drei Fällen einen kontinuierlichen Übergang herstellen kann. Man wähle einfach als fundamentale Gleichung der projektiven Maßbestimmung:

$$u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0 \qquad (9)$$

und lasse hier den Parameter ε von positiven Werten beginnend durch Null hindurch zu negativen Werten übergehen! Es wird sich dann die Riemannsche Geometrie durch die Euklidische Geometrie hindurch in die Geometrie von Bolyai, Lobatscheffsky, Gauß verwandeln. Des näheren stellt sich die Sache so, daß ich um den Punkt $u_3 = 0$ herum ein Gebiet beliebiger Ausdehnung abgrenzen kann (so groß, wenn es Vergnügen macht, daß es unser ganzes Sonnensystem oder auch die gesamte Fixsternwelt umschließt) und dann das ε, positiv oder negativ, so klein annehmen kann, daß innerhalb dieses Gebietes irgendwelche Abstände, Nicht-Euklidisch gemessen, von ihren Euklidischen Beträgen um weniger

1) Vgl. meine Arbeiten „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den Bänden 4 und 6 der Mathematischen Annalen (1871 und 1873).

2) Vgl. die allgemeine Darstellung bei Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen (Teil I, Leipzig 1897), ferner meine autographierten Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (Leipzig 1897).

abweichen, als eine noch so kleine vorgegebene Größe beträgt. —

Man möge gestatten, daß ich mit diesen Einzelbetrachtungen über die projektive Maßbestimmung in der Ebene noch ein weniges weiter fortfahre; es geschieht dies natürlich, um gewisse Überlegungen, die ich beim Vergleich der neuen und der klassischen Mechanik späterhin gebrauche, zweckmäßig vorzubereiten. Ich wende das obengenannte Kontinuitätsprinzip nunmehr auf die Fälle 3, 4 und 5 unserer Tabelle von S. 21 an. Das fundamentale Gebilde sei, bezogen auf ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0 \qquad (10)$$

und hier gebe ich ε das einemal einen sehr kleinen positiven, das anderemal einen sehr kleinen negativen Wert, das drittemal den Wert 0. Mit x, y seien die zugehörigen (gewöhnlichen, nicht homogenen) Koordinaten eines Punktes bezeichnet. Als Entfernung dieses Punktes vom Koordinatenanfangspunkte erhält man dann durch sinngemäße Abänderung der Formel (3):

$$r = \sqrt{\varepsilon x^2 + y^2}, \qquad (11)$$

und hier wolle man nun überlegen, wie das System der um O als Zentrum herumgelegten Kreise (d. h. der Kurven $r = \text{const}$) gestaltet ist. Offenbar bekommen wir bei positivem ε langgestreckte Ellipsen (deren große Achse in die Richtung der X-Achse fällt), bei negativem ε Hyperbeln, deren Asymptoten $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\varepsilon}$ einen sehr kleinen Winkel mit der X-Achse machen, bei verschwindendem Paare gerader Linien $y = +\sqrt{\text{const}}$, die parallel zur X-Achse verlaufen. Es ist amüsant, sich zu überlegen, wieso diese Parallellinienpaare Übergangsformen zwischen den Ellipsen und Hyperbeln der Fälle mit positivem bzw. negativem ε sind!

Wir mögen ferner die zu unserer Maßbestimmung gehörigen äquiformen und kongruenten Transformationen zunächst in den Fällen mit nicht verschwindendem ε betrachten. Da die beiden durch (10) dargestellten Punkte für $\varepsilon \lessgtr 0$ voneinander verschieden sind, bestimmen sie ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade, eindeutig. Unsere Transformationen werden also affine Transformationen sein und können in der Form angesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned}\right| . \qquad (12)$$

Hier sind die Koeffizienten rechter Hand im äquiformen Falle so zu bemessen, daß $\varepsilon(a_{11}x + a_{12}y)^2 + (a_{21}x + a_{12}y)^2$ bis auf einen willkürlich bleibenden Faktor mit $\varepsilon x^2 + y^2$ übereinstimmt. Dies gibt für die Koeffizienten a_{ik} zwei Bedingungen, deren Zahl auf drei steigt, wenn wir zu den kongruenten Transformationen gehend, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

gleich 1 setzen. Wir haben hiernach ∞^4 äquiforme und ∞^3 kongruente Transformationen, in genauer Übereinstimmung selbstverständlich mit dem, was wir im Falle $\varepsilon = 1$ von der Euklidischen Metrik her wissen.

Wir wenden uns nun zum doppelt spezialisierten Falle $\varepsilon = 0$, indem wir als Bedingung festhalten wollen, daß auch hier nur affine Transformationen (12) in Betracht gezogen werden sollen (— dies ist hier eine freie Verabredung, weil die unendlich ferne Gerade nur eine von den geraden Linien ist, die den Punkt $u_1^2 = 0$, d. h. den unendlich fernen Punkt der X-Achse enthalten, von Hause aus also keine Notwendigkeit vorliegt, daß sie bei den von uns zu betrachtenden Transformationen in sich übergeht —). Wir erhalten dann für die äquiformen Transformationen einfach $a_{21} = 0$; jede Transformation

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{22}y + a_{23} \end{aligned}\right| \qquad (13)$$

wird als äquiform anzusprechen sein. Die äquiforme Gruppe enthält trotz unserer einschränkenden Verabredung hier noch fünf Parameter. Als „Bewegungen", d. h. kongruente Transformationen möge man dann unter den (13) diejenigen bezeichnen, welche erstlich unimodular sind, zweitens die Entfernung zweier Punkte x, y und x, y, d. h. im vorliegenden Falle $(y - \bar{y})$, unverändert lassen. Dies gibt $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ und die nach wie vor dreigliedrige Bewegungsgruppe ist durch die Formel gegeben:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= y + a_{23} \end{aligned}\right| . \qquad (14)$$

Die äquiformen Transformationen enthalten sonach zwei Parameter mehr als die kongruenten. Wir werden sagen, daß wir jetzt die Einheiten für den Maßstab auf der X-Achse und der Y-Achse unabhängig wählen können. Insbesondere werden wir in $y - \bar{y}$ bei beliebig gegebenen zwei Punkten eine Bewegungsinvariante haben; ist aber insbesondere $y - \bar{y} = 0$, so ist auch $x - \bar{x}$ eine Bewegungsinvariante.

Es gilt jetzt, alle diese gewiß sehr einfachen Ansätze auf größere Variablenzahlen zu übertragen. Oder vielmehr, wir wollen gleich zu

4 Variablen x, y, z, t übergehen (wobei wir den Inbegriff aller Wertsysteme dieser Variablen mit Minkowski als Welt, x, y, z als Raumkoordinaten, t als Zeit bezeichnen). Wir verzichten darauf, die zugehörigen möglichen Arten der projektiven Maßbestimmung systematisch aufzuzählen, so einfach dies schließlich sein würde. Vielmehr beschränken wir uns darauf zu zeigen, daß hier, in der vierdimensionalen Welt, das System der Mechanik sich unter den Begriff der projektiven Maßbestimmung einordnet, und zwar sowohl das System der klassischen Mechanik, wie das der neuen Mechanik von Lorentz, Einstein, Poincaré und Minkowski, womit das Wesen dieser beiden Systeme, wie insbesondere ihre gegenseitige Stellung zur vollsten Klarheit gebracht sein dürfte.

Wolle man vorab vorübergehend $x = \frac{x_1}{x_5}$, $y = \frac{x_2}{x_5}$, $z = \frac{x_3}{x_5}$, $t = \frac{x_4}{x_5}$ setzen. Die allgemeine lineare Gleichung zwischen x, y, z, t werde dementsprechend so geschrieben: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 + u_5 x_5 = 0$; speziell ist $x_5 = 0$ dasjenige, was wir das „unendlich Ferne" der Welt nennen wollen. Unser alter Bekannter, der Kugelkreis, erhält wie früher die Gleichung:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0; \qquad (15)$$

er ist jetzt aber, da wir fünf homogene Koordinaten haben, als zweifach spezialisiertes Gebilde zu bezeichnen. Neben ihn stellen wir als einfach spezialisiertes Gebilde:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \frac{u_4^2}{c^2} = 0, \qquad (16)$$

wo c die „Lichtgeschwindigkeit" bezeichnen soll, $1/c^2$ also (bei Zugrundelegung der Einheiten, deren man sich in der Mechanik allgemein zu bedienen pflegt) eine sehr kleine Größe ist. In Punktkoordinaten ist dieses Gebilde durch das Gleichungspaar gegeben:

$$x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0, \qquad (17)$$

bestimmt also eindeutig das „unendlich Ferne" der Welt. Läßt man hier, um zum Kugelkreise zu gelangen, c unendlich werden, so wird man für diesen drei Gleichungen in Punktkoordinaten erhalten:

$$x_5 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \qquad (18)$$

Wir haben hier $\frac{x_4}{x_5} = t = \frac{0}{0}$; der Kugelkreis ist, könnte man sagen, zeitlos zu denken. Das unendlich Ferne der Welt ist nur eine der linearen Mannigfaltigkeiten, welche den Kugelkreis enthalten, es erscheint erst dann vor anderen linearen Mannigfaltigkeiten derselben Art bevorzugt, wenn wir den Kugelkreis aus (16) bzw. (17) durch Grenzübergang entstehen lassen. — Auf diese Gebilde (16, 17) bzw. (15, 18) wollen wir nun alle Betrachtungen, die wir vorhin an die Gleichung (10), d. h. $u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0$ knüpften, sinngemäß übertragen.

Ich will gleich mit dem Kugelkreise beginnen, indem ich das Prinzip herübernehme, daß wir entsprechend der begrifflichen Auszeichnung der linearen Mannigfaltigkeit $x_5 = 0$ die zugehörigen äquiformen und kongruenten Transformationen der Welt nur unter den affinen Welttransformationen suchen sollen. Es hat demsprechend jetzt keinen Zweck mehr, die homogene Schreibweise festzuhalten; vielmehr werden wir das allgemeine Schema der in Betracht kommenden Transformationen entsprechend den Gleichungen (13) gleich in folgender Gestalt anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15} \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + \alpha_{25} \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + \alpha_{35} \\ t' &= \qquad\qquad\qquad\quad \alpha_{44}t + \alpha_{55} \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (19)$$

Äquiform werden wir diese Transformationen nennen, wenn sie das Gleichungssystem (18) in sich überführen. Hierfür ergibt sich als einzige Bedingung, daß die Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \qquad (20)$$

orthogonal sei. Dies liefert für die neun Koeffizienten $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{33}$ in bekannter Weise fünf Gleichungen; im ganzen bleiben von den 17 in (19) auftretenden Koeffizienten also 12 willkürlich. — Unter den so bestimmten äquiformen Transformationen werden wir dann gemäß (14) diejenigen als kongruente Transformationen bezeichnen, für die die Matrix (20) unimodular und überdies $\alpha_{44} = 1$ ist. Die Gruppe der so bestimmten kongruenten Transformationen enthält noch zehn Parameter. Sind x, y, z, t und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ die Koordinaten zweier Weltpunkte, so bleibt bei der Gruppe der kongruenten Transformationen allgemein zu reden nur die Differenz $t - \bar{t}$ unverändert; nur wenn $t - \bar{t}$ insbesondere gleich 0 ist, so ist auch $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2$ eine Invariante. Zwei Weltpunkte haben also nur dann eine „rein geometrische" Invariante, wenn ihre Zeitdifferenz verschwindet.

Daß wir mit diesen Angaben über die zum Kugelkreis gehörigen äquiformen und kongruenten Welttransformationen in der Tat die Grundlagen der klassischen Mechanik treffen, bedarf nach dem, was neuerdings von anderen Autoren vielfach hervorgehoben ist, kaum der

Ausführung. Die Grundgleichungen der klassischen Mechanik bleiben in der Tat ungeändert, wenn wir

1. das beliebig gewählte rechtwinklige Raumkoordinatensystem x, y, z durch irgendein anderes gleich orientiertes ersetzen,
2. dem rechtwinkligem System irgendeine gleichförmige Translation erteilt denken,
3. den Anfangspunkt, von dem aus wir die Zeit t zählen, beliebig ändern.

Genau dieses findet in der Gruppe unserer kongruenten Transformationen seinen Ausdruck. Speziell den gleichförmigen Translationen (2) entsprechen in unseren Formeln die Glieder mit $a_{14}t$, $a_{24}t$, $a_{34}t$. Dem Umstande aber, daß unsere äquiformen Transformationen zwei Parameter mehr enthalten, als die kongruenten, korrespondiert die Tatsache, daß in der klassischen Mechanik die Zeiteinheit und die Längeneinheit unabhängig voneinander willkürlich gewählt werden können (worauf sich die Lehre von der „Ähnlichkeit" in der klassischen Mechanik stützt). —

Wir betrachten zweitens den Fall des nur einfach spezialisierten Grundgebildes (17) (das noch keinen besonderen Namen trägt, aber gewiß einen solchen verdiente):

$$x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0.$$

Die äquiformen Transformationen sind hier notwendig affin, um so mehr gehen wir wieder zur nichthomogenen Schreibweise zurück. Das allgemeine Schema einer affinen Transformation ist dann:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\ y' &= a_{21}x + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + a_{25} \\ z' &= a_{31}x + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + a_{35} \\ t' &= a_{41}x + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + a_{45} \end{aligned}\right| \quad (21)$$

Wir haben eine äquiforme Transformation, sobald die durch die Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{14} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{41} & . & . & . & a_{44} \end{vmatrix}$$

gegebene homogene Substitution der x, y, z, t die quadratische Form $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ in ein Multiplum ihrer selbst überführt. Dies legt den 20 Koeffizienten a_{ik} 9 Bedingungen auf; die Gruppe der äquiformen Transformationen enthält also jetzt 11 Parameter. Aus ihr entsteht die Gruppe der kongruenten Transformationen (wie wir sie seither definierten), indem wir verlangen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{14} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{41} & . & . & . & a_{44} \end{vmatrix}$$

den festen Wert 1 haben soll. Wir haben so eine Gruppe mit 10 Parametern. Sind x, y, z, t und x, y, z, t die Koordinaten irgend zweier Weltpunkte, so erweist sich ihr gegenüber das Quadrat der Quasientfernung:

$$(x - x)^2 + (y - y)^2 + (z - z)^2 - c^2(t - t)^2$$

als unveränderlich.

Wir haben nun noch einen feineren Punkt herauszuarbeiten, der schon oben, bei den Erörterungen über das Punktepaar $u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0$ als Fundamentalgebilde einer ebenen Maßbestimmung, hätte herangebracht werden können. Um aus der Gesamtheit der äquiformen Transformationen die kongruenten herauszuheben, haben wir uns damals darauf beschränkt, in den Substitutionen (12) die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

zu setzen. So macht man es ja in der Tat bei Euklidischer Maßbestimmung, wo als Fundamentalgebilde ein imaginäres Punktepaar zugrunde liegt. Aber dies ist doch nur für den Fall des imaginären Punktepaars (für den Fall eines positiven ε) konklusiv. Ist das Punktepaar reell (ε negativ), so ergibt die nähere geometrische Überlegung, daß die unimodularen äquiformen Transformationen für sich kein Kontinuum mehr bilden, wie man dies doch billigerweise von dem Inbegriff der kongruenten Transformationen verlangen sollte. Ihre Gesamtheit zerfällt vielmehr in vier Kontinua. Nur diejenigen Transformationen, welche das Vorzeichen des Differentialausdrucks $\varepsilon dx^2 + dy^2$ ungeändert lassen und überdies positives a_{22} aufweisen, werden im engeren Sinne als Bewegungen zu bezeichnen sein, weil sie allein sich an die „identische" Transformation $x' = x$, $y' = y$ kontinuierlich anschließen. Der früher gegebenen Definition der kongruenten Transformationen sind also bei negativem ε die genannten Forderungen noch ausdrücklich zuzusetzen. Auf die damals gegebene Abzählung der Parameter hat dies keinen Einfluß. Auch haben wir im Grenzfalle $\varepsilon = 0$, indem wir $a_{22} = 1$ setzten, bereits der neuen Verabredung entsprechend gehandelt. — Etwas Ähnliches ist es nun auch mit dem jetzt zu behandelnden Falle des Gebildes (17) (das wegen des negativen Vorzeichens, mit dem der Term $c^2x_4^2$ in seine Gleichung eingeht, bis zu einem gewissen Grade dem Falle des reellen Punktepaares der Ebene zu vergleichen ist). Jetzt zeigt die genauere geometrische Überlegung, — die nicht etwa schwer ist, die aber mehr Platz beanspruchen würde, als wir ihr hier geben können — daß die Gruppe der kongruenten Trans-

formationen, wie wir sie zunächst definierten, noch zwei Kontinua umfaßt, und daß wir als Gruppe der Bewegungen von diesen beiden Kontinuen nur dasjenige brauchen können, welches durch positives α_{44} charakterisiert ist.

Mögen wir die Forderung eines positiven α_{44} also der Definition unserer zehngliedrigen Gruppe noch ausdrücklich hinzufügen. Wir haben dann genau die Lorentzgruppe der „neuen" Mechanik vor uns. Allerdings sagt man von der Lorentzgruppe zumeist, sie habe sechs (nicht zehn) Parameter. Das ist aber nur eine Folge davon, daß man in der mathematischen Physik gewöhnlich nicht die Transformationen (21) der Koordinaten x, y, z, t, sondern nur die entsprechenden Transformationen der Differentiale dx, dy, dz, dt betrachtet, bei denen die additiven Konstanten $\alpha_{15}, \alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{45}$ der Formeln (21) selbstverständlich fortfallen. Der Umstand aber, daß die Gruppe der äquiformen Transformationen jetzt nur einen Parameter mehr enthält als die der kongruenten, findet sein Gegenstück in dem Umstande, daß durch Vorgabe der Konstanten c (der Lichtgeschwindigkeit) in der neuen Mechanik Raumeinheit und Zeiteinheit aneinander geknüpft sind (so daß nur eine der beiden willkürlich angenommen werden kann).

So sind denn alte Mechanik und neue Mechanik gleichmäßig in das Schema der projektiven Maßbestimmung bei vier Variablen x, y, z, t eingeordnet, — der Zielpunkt, den ich zu Anfang dieses Vortrags in Aussicht nahm, ist erreicht. Alles, was ich zu Eingang über das Verhältnis der metrischen Geometrie zur projektiven gesagt habe, würde sich sinngemäß übertragen lassen. Ich beschränke mich aber darauf, noch zwei kurze Bemerkungen zuzufügen.

Zunächst: Gemäß der Terminologie, die ich oben bei Gelegenheit berührte, dürfen wir sagen, daß die klassische Mechanik ebenso wie die neue Mechanik eine „Relativitätstheorie" bezüglich einer Gruppe von zehn Parametern ist. Man möchte fragen, warum denn in der physikalischen Literatur das Wort „Relativitätstheorie" ausschließlich als ein Attribut der neuen Mechanik gebraucht wird? Hierauf scheint zu antworten: weil die neue Mechanik historisch auf dem Umwege über die Elektrodynamik entstanden ist. Es genügt, um die Sachlage klar zu machen, die Maxwellschen Gleichungen für den reinen Äther etwa in der Hertzschen Bezeichnung herzusetzen:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Diese Gleichungen bleiben selbstversändlich ungeändert, wenn man das x, y, z System durch irgendein anderes (gleich orientiertes) rechtwinkliges Koordinatensystem ersetzt, oder wenn man den Anfangspunkt der Zeit beliebig verschiebt; — das macht zusammen eine Gruppe von sieben Parametern. Sie bleiben aber keineswegs mehr ungeändert, wenn man das Koordinatensystem einer gleichförmigen Translation unterwirft, also setzt:

$x' = x + \alpha_{14}t, \quad y' = y + \alpha_{24}t, \quad z' = z + \alpha_{34}t.$

Hierin lag der Anlaß, daß man unter der Herrschaft der Maxwellschen Gleichungen den elektrodynamischen Äther zunächst als im Raume ruhend ansah, daß die Auffassung des absoluten Raumes wieder zu Ehren kam. Es blieb die siebengliedrige Gruppe der Änderungen, welche dem rein äußerlichen Übergang von einem Koordinatensystem x, y, z, t zu einem gleichberechtigten anderen entspricht. — Da kam die Entdeckung, daß diese siebengliedrige Gruppe in einer anderen zehngliedrigen enthalten sei, welche die Maxwellschen Gleichungen ihrerseits unverändert läßt, eben der Lorentzgruppe. Wieder entschwand der absolute Raum (oder vielleicht besser: die absolute Welt), — die Welt ward wieder, was sie früher war, ein relativer Begriff —, und man bildete sich, ohne daran zu denken, daß man nur das frühere Sachverhältnis mutatis mutandis wiederherstellte, das Wort „Relativitätstheorie" als einen neuen, auf die Lorentzgruppe ausschließlich bezüglichen Term.

Als Schlußbemerkung aber möchte ich diese wählen: es wurde oben darauf hingewiesen, daß die Schwierigkeiten, die jedermann empfindet, der, von der Gewöhnung der Euklidischen Geometrie beginnend, versucht, in die Nicht-Euklidischen Doktrinen einzudringen, ohne weiteres wegfallen, wenn man den übergeordneten Standpunkt des projektiven Denkens als Ausgangspunkt nimmt. Analoges möchte für das Studium der neuen Verhältnisse gelten, die innerhalb der Mechanik bei Zugrundelegung der Lorentzgruppe hervortreten. Es scheint unzweckmäßig, bei diesem Studium immer von den in der klassischen Mechanik geltenden Auffassungen auszugehen und dann zu überlegen, wie diese künstlich deformiert werden müssen, um auf die neue Mechanik zu passen. Vielmehr scheint es richtiger, sich vom Standpunkte

der alten Mechanik zunächst zu einem umfassenderen zu erheben, der dann die alte und die neue Mechanik nebeneinander als spezielle Fälle umschließt. Nach dem, was oben angeführt wurde, ist hierfür nicht einmal nötig, sich in die projektive Auffassung der Welt hineinzudenken, denn es genügt die affine Auffassung. Es wird darauf ankommen, eine systematische Invariantentheorie der affinen „Welt" zu schreiben, wozu übrigens alle Elemente in den mehrdimensionalen Untersuchungen der Mathematiker bereits vorliegen, und von ihr aus die beiden Arten der Mechanik, die alte und die neue, nebeneinander zu behandeln. Wieso die alte Mechanik ein Grenzfall der neuen ist, inwieweit sie also als eine Annäherung an letztere angesehen werden darf, kommt dann von selbst hervor. Wer bringt dieses Programm zur Ausführung?

Minkowski hatte die hier geforderten Dinge für sich zweifellos sehr genau überlegt. Aber da er für den weiten Kreis der physikalisch interessierten Leser schrieb, hielt er es im Interesse der Verständlichkeit seiner Entwickelungen für zweckmäßiger, nicht seine bezüglichen inneren Überlegungen vorzutragen, sondern nur die auskristallisierte Form des Algorithmus, zu dem sie im Falle der Lorentzgruppe hinführen. Das ist Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung, die er ohne nähere Begründung als ein bestimmtes System fest verabredeter algebraischer Prozesse an die Spitze seiner elektrodynamischen Entwickelungen stellt[1]).

1) Ich hatte in meinem Vortrage vom 10. Mai insbesondere auch von der eleganten Darstellung der Koeffizienten der Lorentzgruppe durch zehn unabhängige Parameter gesprochen, die sich auf Grund einer wieder zuerst von Cayley aufgestellten berühmten Quaternionenformel ergibt.

Die Schlußformel ist die folgende. Ich verstehe unter i die gewöhnliche imaginäre Einheit, unter i_1, i_2, i_3 die spezifischen Einheiten des Quaternionenkalküls. $A A', \ldots D, D'$ seien acht Parameter, welche an die bilineare Gleichung

$$A A' + B B' + C C' + D D' = 0$$

und übrigens die Ungleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

gebunden sein sollen. Ebenso seien x_0, y_0, z_0, t_0 vier Parameter. Die Substitutionen der Lorentzgruppe sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{\begin{array}{l}(i_1 x' + i_2 y' + i_3 z' + i c t') - (i_1 x_0 + i_2 y_0 + i_3 z_0 + i c t_0) \\ \left[\begin{array}{l}(i_1(A+iA') + i_2(B+iB') + i_3(C+iC') + (D+iD')\\ \cdot (i_1 x + i_2 y + i_3 z + i c t)\\ (i_1(A-iA') + i_2(B-iB') + i_3(C-iC') - (D-iD')\end{array}\right]\end{array}}{(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}$$

Da die Multiplikation der $A, A', \ldots D, D'$ mit einem beliebigen gemeinsamen Faktor die Formel nicht ändert, die $A, A', \ldots$ aber andererseits der obigen Bilinearrelation unterworfen sind, haben wir in der Tat zehnfach unendlich viele Substitutionen vor uns.

Wegen der näheren Einzelheiten und der literarischen Nachweise vergleiche man etwa die „Zusätze und Ergänzungen", welche Herr Fritz Nöther dem eben erscheinenden Schlußhefte von Sommerfelds und meiner „Theorie des Kreisels" (Leipzig, Teubner, 1910) hinzugefügt hat. August 1910. Klein.

(Eingegangen 22. November 1910.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Vierte Konferenz der "International Union for Cooperation in Solar Research".

Die vierte Konferenz der "Solar Union" (erste St. Louis 1904, zweite Oxford 1905, dritte Paris 1907) fand in der Zeit vom 28. August bis 4. September unter lebhafter Beteiligung in Pasadena (Kalifornien) statt. Eine größere Anzahl von Astronomen und Physikern vereinigten sich bereits am 17. August in Boston und nahmen an der elften Versammlung der „Astronomical and Astrophysical Society of America" teil, welche ihre Sitzungen diesmal in den Räumen des Harvard Observatoriums (Direktor E. C. Pickering) abhielt. Von den 37 Vorträgen, welche gehalten wurden, seien die folgenden als von speziellem physikalischem Interesse genannt:

F. W. Very, Über die Korrektionen, die an den Daten der irdischen Meteorologie und der Solarkonstante anzubringen sind und über den „besten" Wert der Solarkonstante.

Derselbe, Eine unabhängige Methode zur Bestimmung der Sonnenstrahlung außerhalb der Erdatmosphäre.

Derselbe, Die äußere strahlende Schicht der Erdatmosphäre.

Derselbe, Verbesserungen bei der Messung der Intensität von Spektrallinien.

E. E. Barnard, Über die Bewegung der Teilchen in dem Schweife des Halleyschen Kometen am 6. Juni 1910.

D. P. Todd, Über die Stabilität eines Ballonkorbes und den Gebrauch von astronomischen Instrumenten in demselben.

J. Stebbins, Resultate mit einem Selen-Photometer.

F. Schlesinger, Die Rotation der Sonne

für verschiedene Bestandteile der umkehrenden Schicht.

W. S. Adams und H. G. Gale, Das Spektrum der Chromosphäre und die Anwendung neuer Laboratoriumsergebnisse auf dasselbe.

W. S. Adams, Einige Resultate einer Untersuchung der Spektren des Sirius, Procyon und Arcturus bei Anwendung hoher Dispersion (wie in Rowlands Sonnenatlas).

W. S. Adams und H. C. Gale, Über das Spektrum des elektrischen Funkens unter hohem Druck.

S. A. Mitchell, Wellenlängenmessungen bei Sonnenfinsternissen.

Von Boston fuhren die Teilnehmer der Konferenz gemeinsam über Buffalo nach Chicago und mit der Santa-Fé-Route über Williams (Grand Canyon) nach Pasadena, wo sie bereits eine Reihe weiterer Mitglieder der Union vorfanden, die allein, teils auf nördlicheren Routen, teils auf demselben Wege, angelangt waren. Aus den Vereinigten Staaten waren u. a. anwesend: J. S. Ames, Ch. G. Abbot, W. S. Adams, W. W. Campbell, W. W. Coblentz, F. Ellerman, E. A. Fath, Mrs. W. Fleming, Ph. Fox, E. B. Frost, H. G. Gale, G. E. Hale, W. J. Humphreys, A. S. King, A. O. Leuschner, H. C. Lord, A. G. Mc. Adie, S. A. Mitchell, E. C. Pickering, W. G. Ritchey, H. N. Russell, Ch. St.-John, F. Sanford, F. Schlesinger, F. H. Seares, V. M. Slipher, F. Slocum, S. W. Stratton, F. R. Watson, H. C. Wilson, aus Kanada: J. S. Plaskett; aus Deutschland: P. Eversheim, J. Hartmann, K. Haußmann, H. Kayser, H. Konen, F. Küstner, E. Pringsheim, K. Schwarzschild, H. Struve; aus England: A. L. Cortie, F. W. Dyson, A. Fowler, E. H. Hills, Sir J. Larmor, H. F. Newall, A. Schuster, H. H. Turner; aus Frankreich: A. Bosler, M. Chretien, A. Cotton, H. Deslandres, Ch. Fabry, M. Hamy, A. de la Baume Pluvinel, P. Puiseux; aus Holland: J. C. Kapteyn; aus Italien: A. Ricco; aus Österreich: J. von Hepperger; aus Rußland: J. O. Bäcklund, N. Donitch, A. Belopolsky; aus Schweden: J. Rydberg; aus der Schweiz: A. Wolfer.

Neben den Werkstätten in Pasadena, in denen bekanntlich die größten Reflektoren der Gegenwart gebaut werden, und den „Offices" konnten die Teilnehmer des Kongresses zunächst das vortrefflich eingerichtete spektroskopische Laboratorium des Sonnen-Observatoriums der „Carnegie-Institution of Washington" in Augenschein nehmen. Alsdann begab sich die ganze Versammlung zu Fuß, auf Maultieren oder in Wagen auf den Gipfel des Mount Wilson, wo die Observatoriumsgebäude nebst ihren Nebengebäuden gelegen sind. Während fünf Tagen, von denen der erste freilich fast ganz durch den Aufstieg in Anspruch genommen wurde, fanden alsdann die Sitzungen der Solar-Union unter wohl einzigartigen äußeren Umständen statt. Das intime Zusammenleben einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Kongreßteilnehmern auf dem abgeschlossenen und wenig ausgedehnten Gipfel des Mount Wilson förderte den Gedankenaustausch und das Sichkennenlernen der Mitglieder in glücklichster Weise.

Vorträge über spezielle Themata waren diesmal ausgeschlossen. Die Hauptzeit der offiziellen Sitzung war den Komite-Berichten und Beschlußsitzungen gewidmet. Eröffnet wurde der Kongreß durch einen Vortrag G. E. Hales über seine neuesten Resultate bei der Untersuchung des Zeeman-Effektes an Sonnenflecken und über das Programm der weiteren Arbeiten des Observatoriums.

Aus den Komite-Berichten und -Beschlüssen sei das folgende erwähnt: auf Antrag des Wellenlängenkomitees wurde einstimmig beschlossen, daß im Bereiche λ 4282 — λ 6494 die arithmetischen Mittel der drei Messungen von Fabry-Buisson, Eversheim und Pfund bis auf weiteres im Internationalen Wellenlängensystem als Normalen zweiter Ordnung gelten sollen (die betr. Zahlen sind inzwischen im Astrophysical Journal **32**, 215—216, 1910 veröffentlicht worden). Wellenlängen, die auf die neuen Normalen bezogen sind (was wünschenswert ist), sollen durch den Zusatz „I. A." als im System der internationalen Einheiten gemessen bezeichnet werden. Weiter sollen im Bereiche λ 5800 bis 6000, wo wenige geeignete Eisenlinien sind, Bariumlinien als Zusatznormalen benutzt werden. Normalen dritter Ordnung (zwischen diejenigen zweiter interpoliert) sollen von verschiedenen Seiten gemessen und dann vom Komite publiziert werden. Ebenso sind in dem Bereiche unterhalb λ 4284 noch weitere Messungen der Normalen zweiter Ordnung auszuführen. Vorläufig sind die Normalen dritter Ordnung zu benutzen, die Kayser dem Kongreß für den Bereich der festgelegten Normalen zweiter Ordnung überreichte und die durchweg wahrscheinliche Fehler nicht größer als 1—2 Tausendstel A. E. haben (auch diese Zahlen sind inzwischen Astrophys. J. **32**, 217—226, 1910, gedruckt worden).

Von weiteren Berichten sei hervorgehoben: Der Bericht des Komites (C. Abbot) für die Messung der Sonnenstrahlung, von Humphreys über einen neuen Typus des Pyrheliometers, der Bericht des Komites für Sonnenrotation, der

Bericht des Komites über Untersuchungen mit dem Spektroheliographen, Vorträge von Abbot über die Solarkonstante und von Kapteyn über Sternströme, ferner der Beschluß, auch die Stellar-Astrophysik in den Bereich der Arbeiten der Solar-Union einzubeziehen und endlich der Beschluß, die nächste Tagung im Jahre 1913 in Bonn abzuhalten.

Am 3. September begab sich die Vereinigung wieder hinunter nach Pasadena, um sich am Tage darauf zu zerstreuen. Die Mehrzahl der auswärtigen Mitglieder wählte den Weg durch den Norden der Vereinigten Staaten als Rückweg und begegnete sich noch häufiger. Auf die Fülle des ihnen von den amerikanischen Physikern und Astronomen in den verschiedensten Städten gezeigten kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es sei erwähnt, daß die meisten Teilnehmer der Versammlung die bedeutenderen Observatorien sowie die physikalischen Institute der größeren Universitäten besuchten, ferner die Institute der Carnegie-Stiftung in Washington, das Bureau of Standards usw. und daß sie überall von Behörden und Privatleuten in gleicher Weise gefördert und mit außerordentlichem Entgegenkommen aufgenommen wurden. H. Konen.

(Eingegangen 14. November 1910.)

PHYSIKALISCHE TECHNIK.

Ein einfacher Vorlesungsapparat.

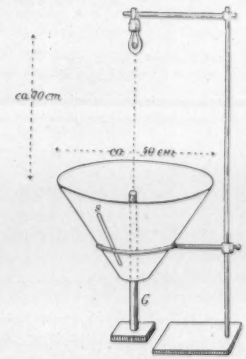
Von W. Kaufmann.

Unsichtbarkeit durchsichtiger Objekte bei gleichförmiger Beleuchtung.

Ein völlig durchsichtiger, also keinerlei Strahlung absorbierender Körper kann im Innern eines gleichförmig temperierten, also auch nach allen Seiten gleichförmig strahlenden Hohlraumes die Strahlenverteilung auch dann nicht ändern, wenn er selbst sich auf beliebiger anderer Temperatur befindet. Ein an irgendeinem Punkt der Oberfläche des Hohlraumes befindliches Auge empfängt also von allen Punkten des Körpers ebensoviel Licht, als wenn der Körper nicht da wäre, der Körper ist völlig unsichtbar.

Da es sich hier nur um eine Kompensation der durch Brechung und Reflexion an dem Körper erzeugten Veränderungen der einzelnen Strahlenbündel handelt, so muß dasselbe Resultat auch gelten, wenn die Hülle nicht selbst leuchtet, sondern allseitig gleichartig beleuchtet ist, und infolge gleichartiger Beschaffenheit von allen ihren Punkten gleichviel reflektiert. Diese Bedingung ist durch die in nebenstehender Figur abgebildete Versuchsanordnung genügend erfüllt.

Ein Trichter aus mattem weißen Karton (besser noch aus Blech und mit Gips bestrichen) ist auf einen Bunsenstativring gesetzt und von oben her durch eine 25 kerzige Glühlampe beleuchtet. Die Lampe muß genau in der Achse stehen und im übrigen das Zimmer verdunkelt sein. Von unten ragt in den Trichter genau axial ein Glasstab G von 0,5 bis 1 cm Dicke, der sorgfältig gereinigt und bezüglich Freiheit von Knötchen und eingebrannten Staubkörnern ausgesucht sein muß. Blickt man durch den etwa 1 cm breiten Spalt S in den Trichter hinein, so ist der Stab völlig unsichtbar. Er wird sichtbar, wenn man entweder den Stab,



oder die Lampe aus der Achse verschiebt, oder den Trichter neigt.

(Eine vollkommenere, aber weniger bequeme Anordnung, aus einer phosphoreszierenden Hohlkugel bestehend, hat R. W. Wood[1]) beschrieben.)

1) Nature **66**, 102, 1902.

(Eingegangen 2. Dezember 1910.)

Demonstrationsversuch über die Energieaufnahme in Wechselstromkreisen.

Von Br. Glatzel.

Seit einiger Zeit benutze ich zur Veranschaulichung der Energieverhältnisse in Wechselstromkreisen eine Versuchsanordnung, welche wohl das Verständnis der betreffenden Vorgänge wesentlich zu erleichtern vermag. Da eine solche Anordnung meines Wissens in weiteren Kreisen nicht bekannt ist, so möchte ich im folgenden kurz die von mir angewendete beschreiben.

Es handelt sich um die experimentelle Darstellung des Verlaufs der momentanen Leistungswerte $e_t \cdot i_t$ während einer Periode des Wechselstromes bei den verschiedenen Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung, wie ihn Fig. 1 zeigt.

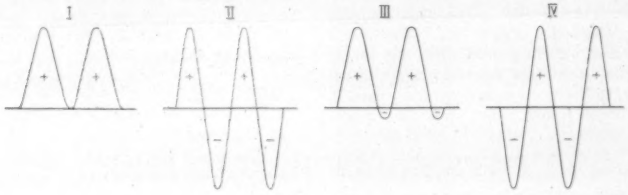


Fig. 1.

In ihr bedeutet das +-Zeichen Energieaufnahme des Wechselstromkreises, also Lieferung von Energie durch die Maschine, das —-Zeichen Zurücklieferung von Energie aus dem Kreise an die Maschine. Die benutzte Schaltung ist in Fig. 2 wiedergegeben.

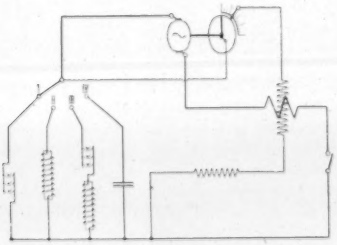


Fig. 2.

Die Stromspule des Wattmeters W, für welches ein Demonstrationsinstrument mit beiderseitigem Ausschlag Verwendung findet, ist dauernd in den Stromkreis eingeschaltet, während die Spannungsspule durch den Kontakt einer Joubertschen Scheibe, welche auf der Achse der Wechselstrommaschine angebracht ist, nur in den einzelnen Zeitmomenten der Periode angeschlossen wird, so daß der jeweilige Ausschlag am Wattmeter stets der Momentanleistung in dem betreffenden Zeitpunkt der Periode entspricht. Beim Durchlaufen der verschiedenen Kontaktstellungen erhält man die aufeinanderfolgenden Werte $e_t i_t$, nach welchen man dann die Leistungskurve aufzeichnen kann. Bei passender Wahl der Kreiskonstanten lassen sich so leicht die oben angegebenen Kurven darstellen.

Für das Verständnis derselben erscheint es mir hierbei von Wichtigkeit, daß man mit der beschriebenen Versuchsanordnung direkt experimentell zeigen kann, daß in den Fällen II, III, IV tatsächlich eine Energierückgabe aus dem Wechselstromkreise an die Maschine erfolgt, Kreis und Maschine also zu bestimmten Zeiten gleichsam ihre Rollen tauschen. Will man die Versuche nicht nur als reine Demonstrationsversuche vorführen, sondern sie auch gleichzeitig zahlenmäßig verwerten, so ist eine Eichung des Wattmeters in Verbindung mit der Joubertschen Scheibe erforderlich, wobei es genügt, lediglich die Spannungsspule des Wattmeters auf Volt zu eichen.

Charlottenburg, Technische Hochschule, September 1910.

(Eingegangen 3. Oktober 1910.)

Die Leistungsgrenze der Spiegelablesung.

Von Wilhelm Volkmann.

Für alle Instrumente, deren Wirksamkeit auf der Anwesenheit eines schwingenden Teiles beruht, gilt die gemeinsame Regel, daß eine Steigerung der Empfindlichkeit erreicht wird, wenn man das Verhältnis des Trägheitsmomentes zum wirksamen Drehungsmoment verkleinert[1]). Diese Regel führt durchweg zu einer Verkleinerung der Instrumente und bei denen mit Spiegelablesung auch zur Verwendung kleiner Spiegel.

1) Heinrich Weber, Pogg. Ann. **137**, 121—136, 1869.

Wie weit man mit Vorteil gehen kann, wird durch Nebenumstände bestimmt, z. B. durch die Möglichkeit der Anfertigung sehr kleiner Stücke, durch die Eigenschaften des Aufhängefadens, vor allem aber durch Erschütterungen. Seit der Erfindung der Quarzfäden und der Ausarbeitung der Methoden zur schütterfreien Aufhängung kann man aber in günstig gelegenen Gebäuden vielfach zu einer solchen Zartheit der Instrumente übergehen, daß die optische Leistungsfähigkeit des Spiegels die Brauchbarkeit des Instrumentes begrenzt. Wie sich auf Grund der Beugung die Leistung des Spiegels stellt, ist schon mehrfach, zuerst wohl von Lord Rayleigh[1]) berechnet worden. Es schien mir nützlich, dieser Rechnung einmal photographische Aufnahmen gegenüberzustellen. Der Rechnung müssen nämlich notwendigerweise einige Voraussetzungen untergelegt werden über das Maß der Deutlichkeit, das zum Erkennen der Skale nötig ist. Wenn man sich hierbei auch auf die Erfahrungen stützen kann, die die Astronomen beim Auflösen von Doppelsternen gesammelt haben, so fehlt es doch an Unterlagen dafür, unter welchen Bedingungen noch Zehntelschätzung möglich ist und dies um so mehr, als auch um den Okularfaden sich Beugungserscheinungen gruppieren.

In der Wahl des Objektivdurchmessers vom Ablesefernrohr ist man nicht beschränkt, unter allen Umständen ist also die kleinste unvermeidliche Einengung des Lichtbündels durch den Spiegelrand gegeben. Dieser stellt daher die Aperturblende dar; wie weit er zugleich für die Begrenzung des Gesichtsfeldes bestimmend ist, hängt vom Abstand zwischen Fernrohr und Spiegel ab. Die Verhältnisse sind also in allen wesentlichen Stücken dieselben, wie wenn man ein astronomisches Fernrohr durch eine vor das Objektiv gestellte Blende stark abblendet.

Unter dem Auflösungsvermögen eines Fernrohres versteht man das Reziproke des Winkels, den, von der Mitte der Aperturblende aus gesehen, zwei Lichtpunkte mindestens einschließen müssen, damit sie im Fernrohr eben noch sicher getrennt gesehen werden können. Vorausgesetzt ist dabei eine so starke Okularvergrößerung, daß nicht etwa die Struktur der Netzhaut dem Erkennen der beiden Punkte hinderlich wird. Für ein optisch vollkommenes Fernrohr nimmt man an[2]), daß die Bilder der beiden Lichtpunkte dann noch gerade getrennt werden können, wenn die Mitte des einen Bildes auf das erste Minimum der das andere umgebenden Beugungssäume fällt. In diesem Falle sinkt zwischen den beiden Bildmittelpunkten die Helligkeit um 15 Proz. und dies genügt bei mittleren Lichtverhältnissen zur Unterscheidung[1]).

Bei einem Fernrohr, dessen Objektiv den Halbmesser h hat, tritt das erste Minimum ein für den Winkel:

$$(\sin \varphi) = \varphi = 0{,}61 \frac{\lambda}{h}$$

und wenn man als mittlere Wellenlänge $\lambda = 0{,}000\,56$ mm setzt, ergibt sich das Auflösungsvermögen (h in mm):

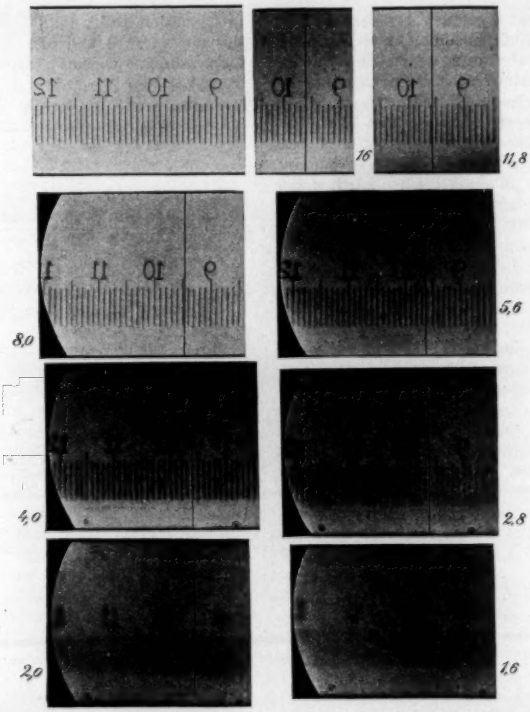
$$A = \frac{h}{1{,}17''}.$$

Bei der Ablesung mit Spiegel und Skala handelt es sich nicht um die Auflösung von Punkten, sondern von parallelen Linien. Die Verhältnisse liegen hier ein wenig günstiger. Eingehend behandelt hat diesen Fall F. L. O. Wadsworth[2]). Weiter ist in Betracht zu ziehen, daß man bei der Auflösung von Linien mit einem geringeren Lichtabfall auskommt[3]) und daß die regelmäßige Wiederkehr der Helligkeitsunterschiede auch die Auflösung erleichtert. Diese Vorteile sind aber sämtlich nur gering und im ganzen wird man im Einklang mit der obigen Formel sagen können, daß die Striche einer Millimeterskale aufhören unterscheidbar zu sein, wenn man um mehr als das Viertausendfache des Spiegelhalbmessers sich mit der Skale von dem Spiegel entfernt. Die Fernrohrvergrößerung soll dabei, je nach dem Abstand zwischen Fernrohr und Spiegel, drei bis sechs Einheiten für jeden mm Spiegelhalbmesser betragen, sonst wird die Erkennbarkeit der Skala durch das Auflösungsvermögen des Auges beschränkt.

Auf der Figur ist zunächst die Skala abgebildet, die zu den Versuchen diente. Sie stammte aus der Werkstatt von C. Bube, Hannover-Bothfeld und war mit der Teilmaschine in eine auf hartes Holz nach besonderem Verfahren aufgetragene Zelluloidschicht geschnitten. Die folgenden Bilder sind photographische Aufnahmen durch Blenden von 16, 11,8, 8,0, 5,6, 4,0, 2,8, 2,0, 1,6 mm Durchmesser. Die Blende war 5 m von der mit Sonnenlicht beleuchteten Skale entfernt, hinter ihr stand ein gutes Ablesefernrohr von 35 cm Objektivbrennweite und etwa 2 cm Okularbrennweite. Darauf folgte ein photographischer Apparat, der mit einer Linse von 38 cm Brennweite aus dem Aristoplansatz von Meyer in Görlitz ausgerüstet war. Die Belichtungszeiten

1) Phil. Mag. (5) **20**, 360—361, 1885.
2) P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl., S. 220.

1) Czapski, Theorie der optischen Instrumente (Winkelmanns Handbuch IV.). 2 Aufl. 1904, S. 402.
2) Phil. Mag. **44**, 83—97, 1897, daselbst auch weitere Quellennachweise.
3) Czapski, Theorie d. o. I., S. 402.



betrugen 15 Sekunden bis 30 Minuten, entwickelt wurde mit Rodinal 1 : 10 mit reichlichem Bromkalizusatz. Der Quarzfaden im Okular hatte 4 μ Durchmesser.

Schon bei der größten Blende bemerkt man eine geringe Verbreiterung der Striche und, besonders im Negativ, leichte Beugungssäume am Okularfaden. Die Verbreiterung der Striche nimmt mit kleiner werdender Blende zu und zwischen 2,8 und 2 mm hört die Erkennbarkeit auf. Es ist das im Einklang mit obiger Formel, die bei 2,5 mm Blendendurchmesser ein Verschwinden der Striche erwarten läßt. Die Grenze für die Möglichkeit der Zehntelschätzung dürfte bei 5 mm liegen, man wird aber nur im Notfall unter 10 mm bei 5 m Skalenabstand gehen, denn bei den geringeren Durchmessern ist die Beugung am Okularfaden doch schon sehr störend. Im allgemeinen dürfte es also ratsam sein, für jeden mm Spiegelhalbmesser nicht mehr als einen Meter mit der Skale abzurücken und dafür 3 bis 6 Vergrößerungseinheiten anzuwenden.

Die Ringe in den Abbildungen stammen von der Beugung an Stäubchen auf den Linsen und Bläschen in den Linsen, die beiden hellen Flecke sind Spiegelflecke, reelle Bilder der Blende, erzeugt durch Spiegelungen und Brechungen an den Linsenflächen. Die Beugungen am Faden betrachte man mit der Lupe[1])!

1) In der gegen mein Original etwas verkleinerten Reproduktion sind sie nicht mehr erkennbar, ich gebe aber gern Fachgenossen, die sich an mich wenden (Charlottenburg bei Berlin, Knesebeckstr. 76), Originalabzüge der mit 2 bis 5,6 mm Blendenweite gemachten Aufnahmen ab.

(Eingegangen 28. November 1910.)

Über einige neuere physikalische Projektions-Demonstrationen.

Von W. Biegon v. Czudnochowski.

Die durch die wachsende Zahl von Zuhörern bedingte steigende Größe der Auditorien einerseits, wie die zunehmende Wertschätzung be-

sonderer Vorlesungsversuche andrerseits, dazu noch die stetige Zunahme der Zahl wichtiger Forschungsergebnisse im Gebiet der Experimentalphysik, stellen den Dozenten oftmals vor recht schwierige Aufgaben: wenn auch im Laufe der Zeit viele Apparate veraltet sind, die mit ihnen anzustellenden Versuche an Wichtigkeit eingebüßt oder sie fast verloren haben, so ist wesentlich Umfangreicheres, und was die zu verwendenden Hilfsmittel anbelangt, erheblich Anspruchsvolleres an ihre Stelle getreten.

Der Erkenntnis dessen und dem Wunsche, da vereinfachend einzugreifen, verdankt eine Reihe von „Universalapparaten" ihre Entstehung, d. h. von Apparaten, welche mit mehr oder weniger zahlreichen Nebenteilchen ausgestattet, zur Vorführung je meist ziemlich umfangreicher „Versuchsreihen" dienen[1]). Zu solchen Universalapparaten im weiteren Sinne gehört auch der Projektionsapparat in der wohl zuerst von weiland Prof. Paalzow benutzten engen Verbindung mit einer optischen Bank[2]). Die allgemeine Einrichtung einer solchen muß als bekannt vorausgesetzt werden, dagegen seien einige neuere Versuchsanordnungen im nachstehenden näher beschrieben, wobei die Verwendung von elektrischem Bogenlicht als Lichtquelle vorausgesetzt ist[3]).

Von Wichtigkeit ist der Fortfall einer Beschränkung auf Projektionen mit durchfallendem Lichte: die Möglichkeit auch völlig undurchsichtige und in der Silhouette kompakte Schatten gebende Gegenstände — z. B. Inneres von Kristalldrusen, polierte Metallanschliffe u. dergl. — gut projizieren zu können. Dem dient das sogen. „Episkop", in Fig. 1 in Ansicht mit der die Lichtquelle enthaltenden (Stahlblech-)Kamera, in Fig. 2 für sich im Schnitt dargestellt. Während hierbei die abbildenden Strahlen ihre ursprüngliche Richtung, nur in anderer Höhenlage, beibehalten, wird bei der in Fig. 3 dargestellten Form die Strahlrichtung völlig geändert, doch ist gerade diese Anordnung zur Projektion von Zeichnungen, Drucken u. dergl. sehr bequem, da diese nur bei W herangehalten zu werden brauchen. Die Abbildung geschieht hier durch die vom Objekte selbst reflektierten Strahlen, deshalb muß mit Rücksicht auf die beträchtliche Absorption zwecks Erreichung genügender Lichtstärke des Bildes eine sehr intensive Lichtquelle verwendet werden.

Von physikalischen Versuchen eignet sich eine große Anzahl von vornherein für die Projektion, andere lassen sich durch — in vielen Fällen nur geringe — Umformung dafür geeignet machen, viele dagegen verlangen eine völlige Umgestaltung.

Besonders eindrucksvoll sind verschiedene Versuche aus der Optik. So ist z. B. in Fig. 4 eine Vorrichtung zur Vorführung der Spiegelungs- und Brechungsphänomene dargestellt, unter Benutzung eines in etwas anderer Form auch von Kolbe, Hartl, Mach, Neu, Rosenberg, Sczymanski u. a., angewandten Prinzips. Die Strahlen, vermittelst geeigneter Blenden in einzelne Bündel geteilt, laufen hierbei unter streifender Inzidenz längs einer mattweißen Platte und zeigen so bei Anwendung geeigneter Diaphragmen den Strahlengang unmittelbar.

Ein anderer sehr wichtiger Versuch aus der Optik, welcher, in der ursprünglichen Form ausgeführt, sorgsamer Vorbereitung bedarf: der Spiegelversuch von Fresnel, läßt sich bei Vorhandensein eines Projektionsapparates sehr bequem und einfach gestalten, indem man die nötigen Teile so miteinander fest verbindet, wie dies Fig. 5 zeigt, so daß zwecks Vorführung nur die betreffende Vorrichtung an der Objektivfassung angefügt zu werden braucht.

Ebenso hat sich auch für den fundamentalen Beugungsversuch eine recht bequeme Form finden lassen, welche auch die Möglichkeit bietet, die Bestimmung der Wellenlänge des Lichtes als Vorlesungsversuch auszuführen. Die bezügliche Versuchsanordnung zeigt Fig. 6 (schematisch). Die Lichtquelle befindet sich in L, C ist der Kondensor, S der Spaltschirm, O

1) Solche Apparate sind z. B. Bunsens Universalstativ, die übliche Ausführung der Apparate für Wärmestrahlung nach Nobili & Melloni, optische Bank nach Zwick, Loosers Thermoskop mit Zubehör, Volkmanns physikalischer Baukasten, B. v. Czudnochowskis Vakuumuniversalapparate u. a. m.

2) vgl. Frick-Lehmann, Phys. Technik Bd. 2.

3) Ausführliches über Projektionsbogenlampen siehe B. v. Czudnochowski, Das elektr. Bogenlicht, Leipzig, Hirzel, S. 577—590 und Fig. 325—326. Weitere einschlägige Veröffentlichungen des Verfassers: „Das Bremerlicht", Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 15, 111, 1902; „Fortschr. d. Bogenlichttechnik", ebenda 16, 365, 1903; „Spektrum des Bremerlichts", ebenda 17, 222, 1904; „Flammen- oder Effektbogenlicht", Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 5, 157—176, 1903; „Über einige besondere Eigenschaften des eingeschlossenen Bogens", ebenda 7, 465—467, 1905; „Zwei Beobachtungen eigenartiger Bewegungserscheinungen am freien Kohlelichtbogen", diese Zeitschr. 4, 845—848, 1903; „Über den elektrischen Lichtbogen zwischen Leitern zweiter Klasse", ebenda 5, 99—103, 1904; „Das Verh. bewegl. zylindr. Eisenkerne in Doppelspulen, ein Beitrag zur Theorie der Differentialbogenlampe", ebenda 5, 205—210, 1905. — Einen Projektionsapparat mit Flammenbogenlampe vom Bremer-Typus zeigt neuerdings die Firma Leybold in Köln an; die eigenartige Elektrodenanordnung zwingt dabei zu einer vom Bisherigen ganz abweichenden Bauart, wodurch die Verwendung in vielen Fällen sich etwas unbequem gestalten dürfte, während der Lichteffekt, von der Färbung abgesehen, wie bekannt, ein höherer ist, als der gewöhnlicher „Reinkohlenlampen" gleichen Energieverbrauches

das Objektiv, G das Gitter, M der Auffangsschirm. In den Lichtbogen wird metallisches Na gebracht, der Abstand der Na-Linie vom direkten Spaltbilde, $\frac{\delta}{2}$, mittelst einfachen Maßstabes bestimmt — ein Zollstock (!) genügt —, ebenso die Entfernung E = Abstand: Gitter — Schirm; die Konstante des zu benutzenden Gitters $c = 0{,}01$ ist bekannt, und damit sind dann alle zur Berechnung nötigen Werte gegeben.

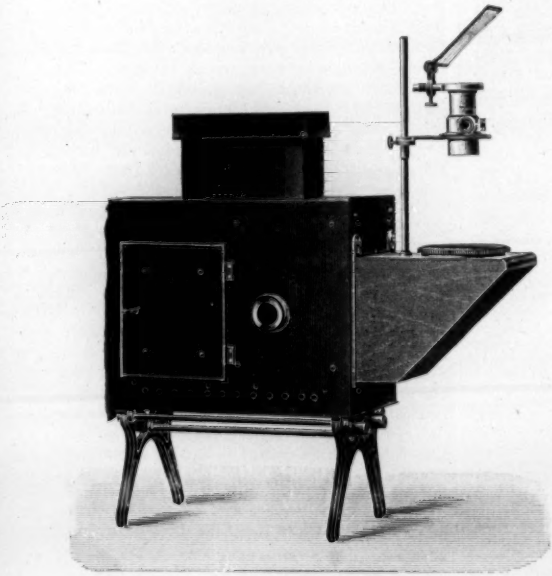


Fig. 1.

Für die Bestimmung des Verhältnisses der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in Luft und Wasser bezw. dessen Demonstration dient die Anordnung Fig. 7. Das Licht der Lampe L fällt durch den Kondensor C auf den Spalt S, und gelangt dann durch ein Spezialobjektiv O in den halb mit Wasser gefüllten Trog T, in welchem sich an der Objektivseite das Gitter, am anderen Ende eine verschiebbare Mattglasplatte befindet, auf welcher sich dann zwei Systeme von Beugungsstreifen mit merklich verschiedenem Streifenabstand zeigen.

Sehr hübsch läßt sich die Totalreflexion zeigen, wozu man sich entweder des sogen. Colladonschen Brunnens, Fig. 8, des Vorbildes der 1900 in Paris in besonders großem Maßstabe, seither aber auch anderwärts, sogar zu öffentlichen Schmuckzwecken (Berlin), ausgeführten „leuchtenden Brunnen", bedienen kann, oder gekrümmter Glasstäbe. Zu erstgenanntem Versuche bedarf man eines hohen, nahe seinem Boden mit einem Spiegelglasfenster und diesem gegenüber mit einer Ausströmungsöffnung versehenen Gefäßes, um ein kräftiges Lichtstrahlenbündel genau in den parabolisch austretenden Wasser-

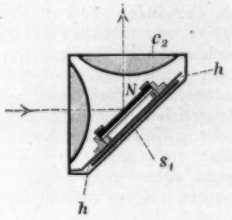


Fig. 2.

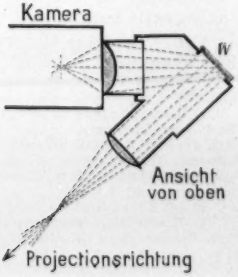


Fig. 3.

strahl gelangen lassen zu können. Die Glasstäbe werden in Öffnungen einer passenden Vorsatzblende eingesetzt, ihre Wirkung ist genau die gleiche, wie die vorbeschriebene kohärenter Wasserstrahlen.

Die Fluoreszenzphänomene verlangen im allgemeinen Licht, das reich an kurzwelligen Strahlen ist, eine Forderung, der die Strahlung des Bogenlichtes sehr gut entspricht; deshalb lassen sich mit dem in Rede stehenden Apparat auch Fluoreszenzversuche sehr gut ausführen. Von sehr überraschender Wirkung ist z. B. der folgende: Man läßt das Strahlenbündel des Apparates durch ein Blauglas auf eine Gelb in Gelb auf weißem Grunde ausgeführte

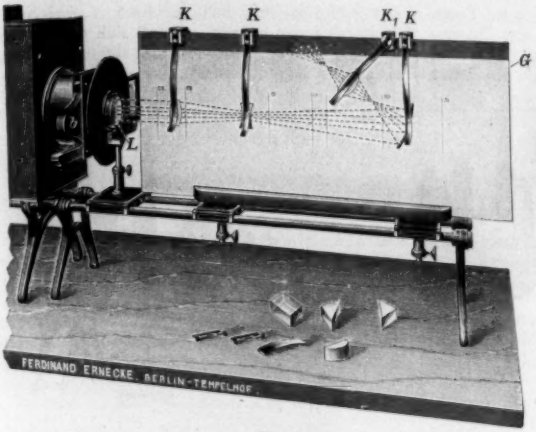


Fig. 4.

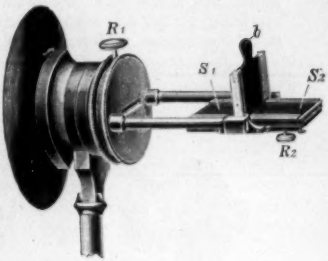


Fig. 5.

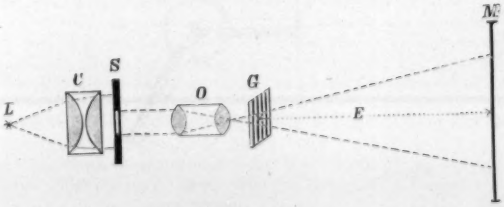


Fig. 6.

Fig. 8.

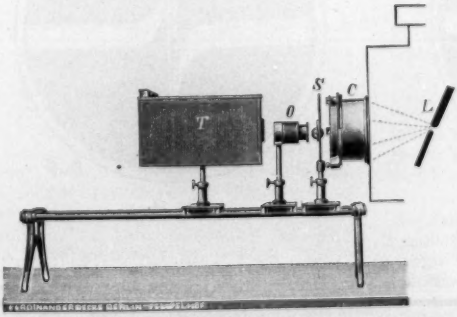


Fig. 7.

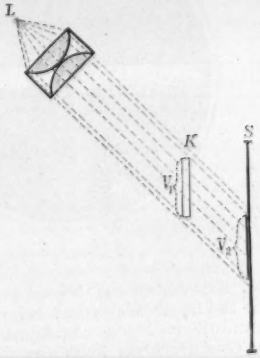


Fig. 9.

Zeichnung, z. B. einer Blume geeigneter Form, fallen, bei welcher nur die Blüte mit Fluoreszenzfarbe gemalt ist, dann erscheint der Grund blau, die Pflanze schwarz, die Blüte leuchtend das gelbgrün (sehr hell) leuchtet —, bei S befindet sich der Schirm, so daß sich die beiden Farben für das Auditorium gut sichtbar nebeneinander zeigen lassen[1]).

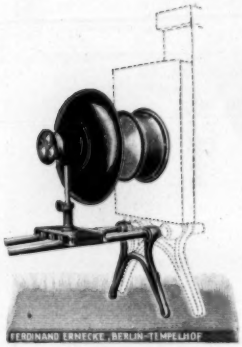


Fig. 10.

Fig. 11.

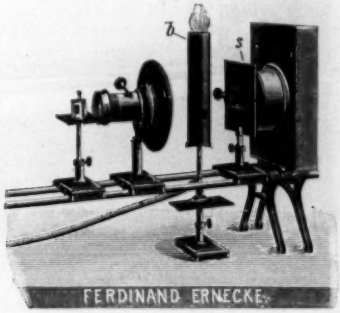


Fig. 12.

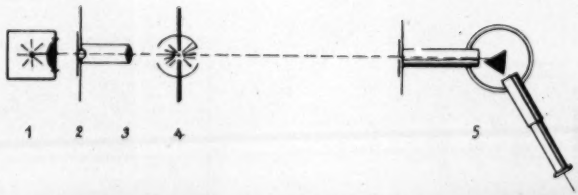


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

gelb. Eine Anordnung, bei welcher sich Fluoreszenz- und Durchgangsfarbe nebeneinander zeigen lassen, ist in Fig. 9 angedeutet. Hier ist V eine Glasküvette mit fluoreszierender Lösung — z. B. Äskulin, das blau, oder Fluoreszein,

1) Eine andere sehr brauchbare Lichtquelle für Fluoreszenzversuche ist der bekannte Apparat nach De la Rive zur Demonstration der Rotation des Vakuumlichtbogens um einen Magnetpol, cf. Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 17, 96, 1904.

Viel Aufmerksamkeit und Interesse hat in neuerer Zeit vermöge ihrer Erfolge die Farbenphotographie erregt; man kann sich dabei bekanntlich verschiedener Verfahren bedienen, aber die physikalischen Grundlagen sind, soweit es sich dabei um Anwendung des Dreifarbenprinzipes handelt, im wesentlichen bei allen dieselben. Wie nun hierbei aus nur drei Grundfarben die verschiedensten Tönungen und Farbenabstufungen zustande kommen, läßt sich sehr hübsch mittelst des Apparates Fig. 10 erläutern; dieser besteht aus drei kleinen identischen Objektiven mit schwach derart gegeneinander geneigten Achsen, daß auf dem Auffangschirm sich die drei monochromatischen Lichtkreise teilweise decken. Dabei entstehen dann 7 verschiedene Tönungen; außer den 3 Grundfarben treten noch 3 binäre Mischfarben und in der Mitte weiß auf — Summe aller 3 Farben. Naturfarbenaufnahmen dieser Art (nach Maxwell-Mietheschem Prinzip) erfordern zur Projektion ja eine besondere Einrichtung: den „Dreifachprojektionsapparat"; durch Anwendung eines Projektionschromoskopes nach Ives, in welchem ein Lichtbündel in drei nahezu gleich starke parallele zerlegt wird, als Vorsatz werden aber auch diese schönen Demonstrationen dem gewöhnlichen Projektionsapparat zugänglich. Noch bequemer sind nach dem von Sanger-Shephard angegebenen Verfahren hergestellte Dreifarbenbilder, welche vollkommen transparent, hintereinandergestellt wie gewöhnliche Photogramme mittelst eines einzigen Objektives projiziert werden. Die Projektion von Bildern nach dem vielgenannten Lumière-Verfahren unterscheidet sich demgegenüber in nichts von der gewöhnlicher Transparentbilder.

Von Interesse und Wichtigkeit sind die verschiedenen Versuche zur Spektralanalyse, ganz allgemein: die mannigfachen Dispersionsphänomene.

In erster Linie handelt es sich dabei um die Demonstration der verschiedenen Emissions- und Absorptionsspektra. Als Prismen verwendet man zweckmäßig mit Schwefelkohlenstoff, Zimtäthyl oder Benzol gefüllte Hohlprismen; um bequem eine Anzahl verschiedener Emissionsspektren hintereinander zeigen zu können, bedient man sich zweckmäßig einer Revolverscheibe für die untere Elektrode, um diese bequem auswechselbar zu machen: Fig. 11, so daß man, da jeder Kohlenstift mit einem anderen Salze präpariert ist, schnell und bequem die Spektra zu wechseln in der Lage ist. (Mittelst eines Bariumplatincyanürschirmes — wie er zur Beobachtung mittelst Röntgenstrahlen dient — kann man auch sehr schön Linien im ultravioletten Bogenspektrum zeigen). Bringt man in den Strahlengang *Na*-Dampf mittelst der in Fig. 12 dargestellten Anordnung, so erscheint in dem durch das vorgesetzte Prisma entworfenen Spektrum die entsprechende Absorptionslinie. Ersetzt man nach Lummer und Pringsheim die *Na*-Dampf haltende Flamme durch ein *Na*-Dampf enthaltendes Prisma, als welches sich sehr schön der Lichtbogen zwischen zwei gegeneinander geneigten Kohlen eignet, wie ihn die nach dem Vorbilde der Bremer-Lampe gebauten Flammenbogenlampen zeigen, so kann man sehr gut die schönen Erscheinungen der anomalen Dispersion beobachten. Die Versuchsanordnung (nach Lummer und Pringsheim) zeigt Fig. 13[1]); 1 ist die Kamera mit Lampe und Kondensor, 2 der Schirm mit wagerechtem Spalt, 3 der Kollimator, 4 die Flammenbogenlampe: das **erste** — Dampf- — Prisma, 5 der Spektralapparat mit dem **zweiten** Prisma. Die an den *Na*-Linien zu beobachtende Erscheinung zeigt Fig. 14[1]); man erkennt deutlich die sonderbare Veränderung des Spektrums. Bei Anwendung eines Flammenbogens kann die Erscheinung noch eine Abänderung erleiden, wie Fig. 15[1]) darstellt, insofern hier noch Selbstumkehr hinzutritt — eine dunkle Linie, wo eine helle zu erwarten wäre. —

Die Wiedervereinigung von Spektralfarben läßt sich in verschiedener Weise ausführen. Besser als die meist übliche Reihe mehrerer kleiner runder Spiegel nebeneinander ist der Spiegelapparat nach Oosting, Fig. 16, bei welchem das Spektrum von einer in schmale vertikale und so einzeln drehbare Streifen zerlegten spiegelnden Fläche aufgefangen wird, so daß die Möglichkeit geboten ist, durch Mischung relativ sehr engbegrenzter Spektralgebiete relativ reine Mischfarben zu erhalten. Der gleiche Apparat kann auch zu Versuchen über Komplementärfarben dienen.

Eine interessante neuere Anordnung für Polarisationsversuche ist die von Grimsehl angegebene Fig. 17. Bei dieser ist der polarisierende Körper in Gestalt geeigneter Gebilde aus schwarzem Glase, bei *a* einer 4seitigen Pyramide, in *b* einer Kugel, auf einem weißen Schirm befestigt, auf welchem dann durch Reflexion gebildete Lichtflächen eigenartiger Form die Polarisationsverhältnisse veranschaulichen.

Daß sich unter Anwendung eines mikroskopischen Ansatzes auch mikroskopische Präparate projizieren lassen, bedarf keines besonderen Hinweises; besonders interessant sind die Erscheinungen der Lehmannschen „flüssigen

1) B. v. Czudnochowski, Das elektr. Bogenlicht, Leipzig, Hirzel.

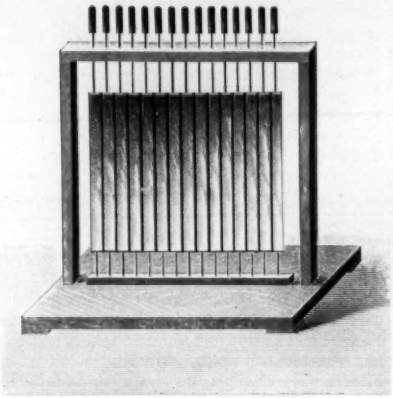


Fig. 16.

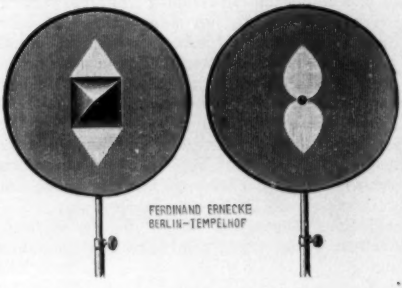


Fig. 17.

Kristalle", die sich im Horizontalprojektionsansatz gut beobachtbar darstellen lassen[1]).

Von neueren akustischen Demonstrationen sei die Vorführung der Schwingungsformen schwingender Saiten, die Untersuchung von Tonwellenformen nach der Methode von F. F. Martens, Fig. 18, erwähnt. Hier schwingen genau synchron, indem sie sich abwechselnd gleichzeitig gegen- bezw. voneinander neigen; die resultierende geradlinige Bewegung des Lichtpunktes wird dann durch den rotierenden Spiegel zur Schwingungskurve ausgezogen.

Versuche, die sich nur für Horizontalprojektion eignen, sind die zur Demonstration elek-

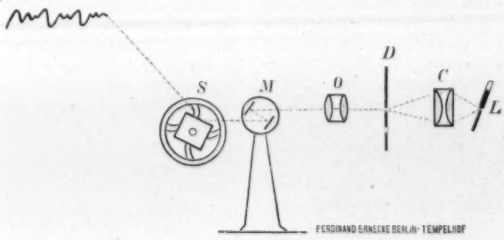


Fig. 18.

ist L die Lampe, C der Kondensor, D ein Diaphragma, O das Objektiv, M eine Membrankapsel mit Schalltrichter und zwei Spiegeln, S ein rotierender Spiegel, der auf einem Schirme dann Schallkurven, wie die Figur eine zeigt, zum Vorschein bringt. Es ist hier zu bemerken, daß es sich hier nicht um etwas der Erzeugung der Lissajousschen Figuren Ähnliches handelt: die beiden Spiegel stehen einander parallel in gleicher Entfernung vom Kapselrande und

trischer und magnetischer Kraftfelder, mittelst trockenem oder in Alkohol aufgeschwemmtem Eisenpulver (letzteres nach F. Hoffmann), bezw. Chininsulfat in Terpentinöl oder pulverisiertem Rutil (Mie) u. a. m.

Daß eine ganze Anzahl elektrischer Versuche sich sehr gut zur Projektion eignen, wie elektrolytische Vorgänge, bedarf als bekannt keines näheren Eingehens, wenn auch in der Ausführung der speziell für derartigen Gebrauch bestimmten Spezialapparate unleugbar Verbesserungen getroffen sind; als solche seien hier nur transparente Meßinstrumente nach dem Deprez-d'Arsonval-Prinzip genannt.

1) Näheres hierüber in: O. Lehmann, „Die scheinbar lebenden Kristalle", Eßlingen, J. F. Schreiber, 1907, mit 109 farbigen Abbildungen im Text und zahlreichen Literaturangaben.

Die vorstehenden Ausführungen zeigen einerseits, daß die altbekannte Laterna magica aus einem Spielzeug zu einem wissenschaftlichen Instrument ersten Ranges geworden ist, und lassen andrerseits erkennen, daß man auch zunächst nur subjektiv beobachtbar scheinende Vorgänge in eine für objektive Darstellung geeignete Form zu bringen vermag.

Verfasser möchte am Schlusse nicht verfehlen, der Firma F. Ernecke zu Berlin-Tempelhof für gütige Überlassung einer größeren Anzahl von Klischees zu vorliegendem Aufsatze seinen verbindlichsten Dank auszusprechen; dieselben stellen mit Ausnahme von Fig. 13, 14, 15 für den in Rede stehenden Zweck besonders bewährte Spezialausführungen des Universal-Projektions-Apparates *NOR* der genannten Firma dar.

Wilmersdorf, 3. November 1910.

(Eingegangen 9. November 1910.)

MITTEILUNG ÜBER MASSEINHEITEN.

Internationaler Wert der EMK. des Weston-Normalelements.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Nach den Beschlüssen der Internationalen Konferenz zu London im Jahre 1908 ist die EMK. des Westonelements zurückzuführen auf das durch die Quecksilbereinheit definierte Internationale Ohm und das durch die Niederschlagsmenge im Silbervoltameter definierte Internationale Ampere.

Im Auftrag des in London gewählten Internationalen Komitees wurden im Frühjahr 1910 zu Washington von Vertretern der in Amerika, Deutschland, England und Frankreich bestehenden Staatslaboratorien silbervoltametrische Messungen ausgeführt. Auf Grund dieser Messungen wird von dem Internationalen Komitee für die EMK. des mit normalem Merkurosulfat beschickten, nach den in London gegebenen Vorschriften zusammengesetzten Weston-Normalelements[1]) der Wert 1,0183 Int. Volt bei 20°C vom 1. Januar 1911 ab zur Annahme empfohlen.

Von diesem Zeitpunkt an wird der genannte Wert den Messungen in der Reichsanstalt zugrunde gelegt werden[2]).

1) Enthaltend einen Bodenkörper von festem Kadmiumsulfat, $8/3\ H_2O$.

2) Bisher wurde in Deutschland als Wert für das Weston-Normalelement die Zahl 1,0186 Volt bei 20° C benutzt. Die durch die Neufestsetzung herbeigeführte Änderung der Spannungseinheit beträgt aber nicht, wie man glauben könnte, 0,0003 Volt, sondern weniger. Dies rührt z. T. daher, daß das Merkurosulfat der neuen Elemente eine etwas geringere elektromotorische Kraft ergibt als dasjenige der bisherigen Spannungsnormale der Reichsanstalt. Für wissenschaftliche Messungen von hoher Genauigkeit dürfte es sich empfehlen, die dabei benutzten Normalelemente durch eine Nachprüfung bei der Reichsanstalt auf die neue Spannungseinheit beziehen zu lassen.

E. Warburg.

(Eingegangen 15. Dezember 1910.)

BESPRECHUNGEN.

Richard Hennig, Die älteste Entwickelung der Telegraphie und Telephonie. „Wissen und Können", Bd. 2. Mit 61 Abbildungen. 8. VIII u. 199 S. Leipzig, J. A. Barth. 1908. Geb. M. 4.—

H. Brick, Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. „Aus Natur und Geisteswelt", Bd. 235. Mit 58 Abbildungen. kl. 8. II u. 107 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1908. M. 1.—, geb. M. 1.25

Diese beiden Bücher ergänzen einander in bester Weise, da das zweite gleichsam historisch dort anknüpft, wo das erste endet. Der Umfang bringt es mit sich, daß das Hennigsche Werk weit breiter angelegt ist als das Bricksche. Während dieses mehr die technische Seite des Gegenstandes betont, hebt jenes mehr die historische hervor. Beide Bücher bieten eine Fülle des Interessanten, und verdienen, eifrig gelesen zu werden. Max Iklé.

Hans Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. III. Bd. Technische Hydromechanik. 8. 552 S. mit 205 Abbildungen. München, R. Oldenbourg. 1910. M. 14.—

Die große Wichtigkeit, welche die Bewegungen der Flüssigkeiten heute in der Technik gewonnen haben, macht es einerseits zum dringenden Bedürfnis der praktischen Hydromechanik, sichere theoretische Fundamente zu gewinnen und zwingt anderseits die theoretische Hydrodynamik, näheren Anschluß, wie früher, an die wirklichen, in Natur und Technik vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen zu suchen. Es

ist ein großes Verdienst von Lorenz, daß er eine solche Versöhnung der beiden, einander lange genug fremd gebliebenen Wissenszweige mit Entschiedenheit anstrebt, und das macht sein Buch auch für den Physiker wichtig und anregend. Daß ihm diese gegenseitige Anpassung der hydrodynamischen Grundlagen und der technischen Probleme meist nur durch mehr oder minder empirische Ansätze gelingen kann, liegt durchaus im Wesen der Sache. Allerdings kann eben deshalb die Hydrodynamik selbst (wie etwa bei dem, für Ref. speziell interessanten, Turbulenzproblem) durch diese Behandlung keine wesentliche Förderung erfahren; aber eine gewisse Anregung kann unter allen Umständen davon ausgehen.

Im ersten Kapitel wird die Statik der Flüssigkeiten behandelt, Anwendungen auf schwimmende Körper gemacht, besonders auf Schwingungen von Schiffen, und den Problemen der Oberflächenspannung eine eingehende Besprechung gewidmet. Weiterhin führt der einfache Ansatz einer stationären Parallelströmung zur Behandlung vieler Strömungsprobleme, des hydraulischen Stoßes, der Strahlapparate usw., insbesondere auch der Turbinen, Kreiselpumpen und Propeller. Sehr interessant ist im dritten Kapitel ausgeführt, wie der Ansatz einer zeitlich veränderlichen Parallelströmung gleichzeitig Erscheinungen in technischen Anordnungen und die scheinbar ganz entfernt liegenden Vorgänge der Ebbe und Flut überschauen läßt. Die weiteren Kapitel verwenden noch eingehender hydrodynamische Ansätze, und zwar für mehrdimensionale Flüssigkeitsbewegung (die Anwendung auf den Schiffskreisel ist wohl durch die neuere Behandlung in Klein und Sommerfelds Kreiselbuch überholt), für Wirbelbewegungen mit interessanten Anwendungen auf die Oberflächengestalt rotierender Flüssigkeiten und die erweiterte Theorie der Kreiselräder, und für die Bewegung zäher Flüssigkeiten, deren Theorie bei der Grundwasserbewegung ihre befriedigendste Anwendung findet. Die Theorie des Schiffswiderstandes wird gesondert und rein empirisch behandelt. Den Schluß bildet ein interessantes historisches Kapitel.

In der Darstellung ist durchweg Wert auf Anschaulichkeit und tunlichste Vereinfachung der mathematischen Ableitungen gelegt. Ludwig Hopf.

Tagesereignisse.

Zum Studium der radioaktiven Erscheinungen ist der Académie des Sciences ein Legat von Antoine Becquerel im Betrage von 100000 Fr. zugefallen.

Wegen Überlassung von einem Gramm Radium, das Sir Ernest Cassel dem Radiuminstitut in London schenken will, unterhandelte der Direktor dieses Instituts, Alton, in Wien mit der österreichischen Regierung. Diese willigte in den Verkauf zum Preise von 360000 Kronen ein.

Über die Entdeckung eines neuen radioaktiven Minerals wird aus Pilbarra in Westaustralien berichtet. Die hauptsächlichen Bestandteile sind Thorium und Uran, letzteres enthält Radium. Dem Mineral ist der Name Pilbarrit gegeben worden.

Der **Verband Deutscher Elektrotechniker** hält in der Zeit vom 29. Mai bis 1. Juni 1911 in München seine XIX. Jahresversammlung ab. Der Gewohnheit der letzten Jahre entsprechend wird auf jeder Versammlung ein besonderes Thema behandelt und zwar diesmal „Die Elektrizität im Hause".

Wie verlautet, soll es den **Wiener** Professoren **Ulzer** und **Sommer** durch ein neues Verfahren gelungen sein, binnen sechs Wochen aus Uranpechblende Radium zu erhalten. Das bisherige Verfahren erforderte achtzehn Monate. Die gewonnene Menge Radium ist die zweitgrößte der Welt, beinahe so groß, als die des Wiener Radiuminstituts und ungefähr eine Million Mark wert.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent der Mathematik an der Universität München Dr. Friedrich Hartogs und der Privatdozent für Theoretische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr.-Ing. Aug. Hilpert zum a. o. Professor, Dr. Otto Schönrock und Privatdozent Dr. Ernst Gehrcke zu Kaiserlichen Professoren und Mitgliedern der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin, Dr. Erich Giebe und Dr. Harald Schering zu ständigen Mitarbeitern derselben.

Verliehen: Dem Privatdozent an der Technischen Hochschule Aachen, Dr. Peter Polis, dem Privatdozent der Chemie an der Universität Straßburg Dr. Fritz Straus, dem Observator vom Aeronautischen Observatorium in Lindenberg bei Berlin Dr. Otto Tetens, dem Vorsteher der chemischen Abteilung der Medizinschule in Kairo Dr. W. A. Schmidt der Titel Professor, dem Physiker im Reichsmarineamt in Berlin Professor Dr. Hans Maurer der Titel Admiralitätsrat.

Berufen: Der ord. Professor der Chemie an der deutschen Universität Prag Dr. Guido Goldschmiedt in gleicher Eigenschaft an die Universität Wien.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Gießen Geh. Hofrat Dr. Moritz Pasch zum 1. April 1911.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Karl Koppe, der frühere Privatdozent der Astronomie in Zürich und Genf und nachmalige Direktor der Urania in Berlin Professor Dr. Wilhelm Meyer, der frühere ord. Professor für technische Mechanik an der Technischen Hochschule Stuttgart Oberbaurat Edmund von Autenrieth, der Professor der Physik an der Universität Basel Dr. Eduard Hagenbach-Bischoff.

Gesuche.

Realschulprofessor,

Physiker, **sucht,** um sich ausschließlich in seiner Fachwissenschaft betätigen zu können, eine entsprechende Stellung. Angebote unter **S. H. 336** an die Expedition dieser Zeitschrift erbeten.

Das **Militärversuchsamt Berlin-Jungfernheide** (Postamt Plötzensee) **sucht** einen

promovierten Physiker.

Jahresvergütung 2100 M. Bewerbern werden auf Wunsch die Einstellungsbedingungen übersandt.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

JP Have others vols